

Методические аспекты обучения учащихся решению экстремальных геометрических задач в школьном курсе математики

Посконных Евгения Дмитриевна

Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова

Студент

Гласман Наталья Семеновна

Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова

Канд. пед. наук, доцент

Аннотация

В статье раскрывается необходимость решения геометрических задач экстремального характера в школе, рассмотрены общий и элементарные методы решения задач на экстремумы, на конкретных задачах даны некоторые методические рекомендации, также выявлены возможные затруднения учащихся, которые могут возникнуть в процессе их решения.

Ключевые слова: экстремальные задачи, общий метод, элементарные методы решения экстремальных задач.

Methods of teaching the solution of extreme geometric problems in the school mathematics course

Poskonykh Evgeniya Dmitrievna

Khakass State University named after N.F. Katanov

Student

Glasman Natalia Semenovna

Khakass State University named after N.F. Katanov

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor

Abstract

The article reveals the need to solve geometric problems of an extreme nature at school, discusses general and elementary methods for solving problems at extremes, some methodological recommendations are considered on specific tasks, and possible difficulties of students that may arise in the process of solving them are also identified.

Keywords: extreme problems, general method, elementary methods for solving extreme problems.

Еще с древних времен человек задумывался о том, как, имея ограниченные ресурсы, достигнуть наилучшего результата. Такие жизненные вопросы, как нахождение кратчайшей дороги, получение большей прибыли с

продукции, при минимальных затратах получение максимального количества сырья, приобретение за минимальную цену вещи лучшего качества - иллюстрируют главную задачу практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения наибольшей выгоды. В математике таким проблемам соответствует целый класс задач, в которых при заданных ограничениях нужно отыскать наибольшее (максимальное) или наименьшее (минимальное) значение некоторой функции. Задачи такого рода называются экстремальными (или задачами на оптимизацию).

Федеральный Государственный Образовательный стандарт выдвигает требования к результатам освоения основных образовательных программ. В Приказе Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 № 287 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования" по учебному предмету математика требования к предметным результатам освоения курса должны отражать «4) ... умение решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, нахождение пути, скорости и ускорения».

Это приводит педагога к необходимости углубления и расширения представлений, обучающихся о методах решения экстремальных задач. Поэтому целью работы выступает рассмотрение некоторых особенностей геометрических задач экстремального характера и составление рекомендаций по их решению различными методами.

Под экстремальными геометрическими задачами понимают задачи на нахождение наибольших или наименьших значений геометрических величин.

Экстремальные геометрические задачи представляют собой своеобразный «математический сплав» геометрии, алгебры, тригонометрии, анализа. Поэтому решение таких задач очень полезно для учащихся.

При решении геометрических задач экстремального характера можно воспользоваться как общим методом (с помощью производной), так и частными методами элементарной математики. Общий метод решения экстремальных задач изучается в курсе алгебры и начала анализа в старшей школе. Перед изучением общего метода важно познакомить учащихся с элементарными методами решения задач на экстремум. Это необходимо делать в основной школе, так как такие методы решения иногда оказываются проще и рациональнее по сравнению с общим методом.

Рассмотрим некоторые методы решения экстремальных задач.

Общий метод решения задач экстремального характера изучается в курсе алгебры и начала анализа в 10 классе. Учащиеся знакомятся с термином «экстремальные задачи», дается алгоритм решения задач такого рода.

Экстремальные задачи общим методом решаются в три этапа: 1) составление математической модели, 2) работа с составленной моделью, 3) ответ на вопрос задачи.

Приведем пример конкретной задачи.

Задача 1. Памятник состоит из статуи и постамента. К памятнику подошел человек. Верхняя точка памятника находится выше уровня его глаз

на a метров, а верхняя точка постамента - на b м. На каком расстоянии от памятника должен встать человек, чтобы видеть статую под наибольшим углом? [1]

Эта задача в школьном курсе алгебры и начала анализа решается с помощью производной. Для решения такого рода задач необходимо владеть основными знаниями по теме применение производной к исследованию функций и обладать навыками дифференцирования. Перед решением задачи целесообразно повторить с учащимися алгоритм нахождения точек экстремума.

На рисунке 1 представлена геометрическая модель ситуации: OF - постамент, EP - статуя, O - основание постамента, M - точка, в которой находится человек, AM - рост человека до уровня глаз, PK - a , FK - b , PF - $a - b$, $\angle KAF = \alpha$.

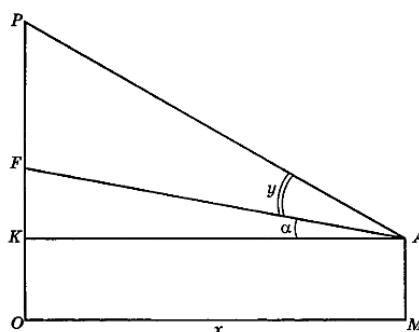


Рисунок 1 - Геометрическая модель задачи 1

На первом этапе происходит составление математической модели.

Выделяется оптимизируемая величина - $\angle PAF$. Обозначим его буквой y .

Примем за независимую переменную x расстояние OM; реальные границы изменения x таковы: $0 < x < +\infty$.

Вычислим интересующий нас угол: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{FK}{AK} = \frac{b}{x}$, $\operatorname{tg}(\alpha + y) = \frac{PK}{AK} = \frac{a}{x}$.

С другой стороны,

$$\operatorname{tg}(\alpha + y) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(y)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(y)}.$$

Пусть $\operatorname{tg}(y) = z$, тогда

$$\operatorname{tg}(\alpha + y) = \frac{\frac{b}{x} + z}{1 - \frac{b}{x} \cdot z} = \frac{b + zx}{x - bz} = \frac{a}{x}.$$

Откуда находим:

$$z = \frac{(a - b)x}{x^2 + ab}.$$

В задаче речь идет об $y_{\text{наиб}}$. Но наибольшему значению угла y будет соответствовать и наибольшее значение тангенса угла, т.е. $z_{\text{наиб}}$.

Математическая модель составлена: речь идет об отыскании наибольшего значения функции.

$$z = \frac{(a-b)x}{x^2 + ab}, x > 0.$$

Второй этап. Работа с составленной моделью.

$$z' = \frac{(a-b)(ab - x^2)}{(x^2 + ab)^2};$$

При $z' = 0$, $x = \sqrt{ab}$ - это единственная точка экстремума функции, причем точка максимума. Значит, $z_{\text{наиб}}$ достигается именно в этой точке.

На третьем этапе требуется ответить на вопрос задачи.

В задаче требуется указать на каком расстоянии от памятника должен стоять человек. Это расстояние ОМ в процессе решения мы обозначили буквой x и выяснили, что $x = \sqrt{ab}$.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

При решении текстовых задач наиболее трудным для учащихся является переход от содержательной части задачи к математической задачи нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на промежутке [2].

Ряд геометрических задач на экстремум можно решить элементарными методами, которые требуют от учащихся применения приемов, содействующих развитию их математических способностей, и учат рациональному использованию математического аппарата.

Задача 2. Какие размеры должен иметь спичечный коробок заданного объема V , чтобы площадь его полной поверхности была минимальна? Спичечный коробок состоит из футляра и собственно коробочки (рисунок 2) [3].

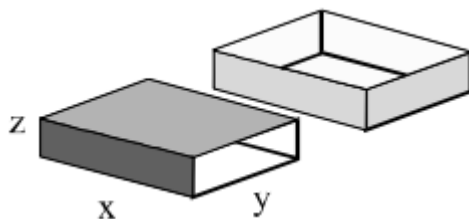


Рисунок 2 – условие к задаче 2

Для решения данной задачи учащихся необходимо познакомить с известным неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}$, которое выполняется для неотрицательных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Решение. Пусть x – длина, y – ширина, z – высота футляра. Площадь S полной поверхности футляра вместе с коробочкой равна $4xz + 3xy + 2yz$. По условию $V = xyz$ – заданная величина. Отсюда $S = \frac{4V}{y} + \frac{3V}{z} + \frac{2V}{x}$. Применяя к этим трем слагаемым неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем:

$$S \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{4V}{y} \cdot \frac{3V}{z} \cdot \frac{2V}{x}} = 3 \cdot \sqrt[3]{24V^2}.$$

Равенство достигается, когда все три слагаемых равны, т.е. при $\frac{4V}{y} = \frac{3V}{z} = \frac{2V}{x} = \sqrt[3]{24V^2}$. Отсюда находим $x = \sqrt[3]{\frac{V}{3}}$, $y = 2x$, $z = \frac{3}{2}x$.

Для решения данной задачи учащимся следует знать формулу площади прямоугольника, объёма параллелепипеда и неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

Трудности учащихся могут заключаться в выражении одних величин через другие, в извлечении кубического корня. Также представляет большую сложность для учащихся тот факт, что задача решается в буквенном виде.

Задача 3. Дана окружность с центром O и радиусом R и точка K вне её. Найдите на окружности точку, расстояние от которой до точки K является а) наименьшим; б) наибольшим [4].

Решение: Пусть A и B – точки пересечения прямой KO с окружностью, причём $KA < KB$ (рисунок 3).

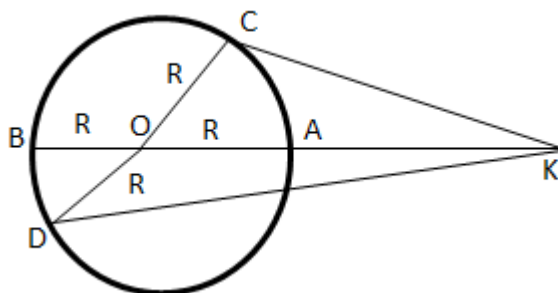


Рисунок 3 - Геометрическая модель задачи 3

а) Покажем, что наименьшим является расстояние от точки A до точки K . Отметим на окружности любую другую точку C и докажем, что $AK < CK$.

Рассмотрим треугольник OCK . Из рисунка учащиеся могут заметить, что сторона $OK = OA + AK$. Далее с учащимися необходимо повторить неравенство треугольника, которое гласит о том, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон [5]. Из неравенства треугольника получаем: $OC + CK > OK$, $OC + CK > OA + AK$. Из рисунка $OC = OA = R$, значит $CK > AK$. Таким образом, мы доказали, что AK – наименьшее расстояние от точки K до окружности.

б) Покажем, что наибольшим является расстояние от точки B до K . Для этого отметим на окружности любую другую точку D и докажем, что $KB > KD$ (рисунок 3). Рассмотрим треугольник KOD . Действительно, по неравенству треугольника: $KO + OD > KD$. Т.к. $OD = OB = R$, то $KB = KO + OB > KD$. Значит, наибольшим расстоянием от точки K до точки на окружности является расстояние KB .

В данной задаче в пункте а) можно рассуждать иначе. Проведем касательную к окружности в точке A , тогда точки K и C , лежат в разных плоскостях относительно неё (рисунок 4).

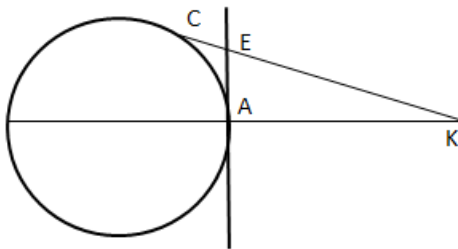


Рисунок 4 - Геометрическая модель задачи 3 ко второму способу решения

KC пересекает касательную в некоторой точке E . Следовательно $KC > KE > KA$. Это следует из того факта, что перпендикуляр короче наклонной, либо катет меньше гипотенузы.

Исходя из всего выше изложенного, можно сделать следующие выводы: задачи экстремального характера являются важными для практической деятельности человека. Они очень разнообразны по своему содержанию, форме и приемам решения. Но, несмотря на это разнообразие, их объединяет то, что все они направлены на поиск наиболее выгодного, наиболее экономного, наименее трудоемкого. Другими словами, все они направлены на поиск наилучшего варианта. Экстремальные геометрические задачи решаются не только общим методом, который вводится в 10 классе в курсе алгебры и начал математического анализа, также и элементарными методами, с помощью которых учащиеся отрабатывают приемы, содействующие развитию их математических способностей.

Библиографический список

1. Мордкович А. Г, Семенов П. В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень). М.: Мнемозина, 2009. 424 с.
2. Капкаева Л. С. Теория и методика обучения математике: частная методика в 2 ч. Часть 2: учебное пособие для вузов. М.: Издательство Юрайт, 2022. 191 с.
3. Актершев С. П. Задачи на максимум и минимум. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 192 с.
4. Блинков А. Д., Филипповский Г. Б. Геометрические задачи на экстремумы. М.: МЦНМО, 2022. 176 с.
5. Геометрия 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. организации / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. М.: Просвещение, 2014. 383 с.