

Основы теории экспертных систем нечеткой диагностики

Осипов Геннадий Сергеевич

Сахалинский государственный университет.

д.т.н., заведующий кафедрой Информатики

Аннотация

Изложены теоретические и методологические основы теории нечетких реляционных уравнений как основы решения обратной многокаскадной задачи для экспертных систем нечеткой диагностики. Основные положения, сформулированные в статье проиллюстрированы на решении широкого круга задач. Проведена практическая апробация теории и методики решения в пакете компьютерной математики.

Ключевые слова: нечеткие реляционные уравнения, нечеткая диагностика

Fundamentals of the theory of expert systems of fuzzy diagnostics

Osipov Gennadij Sergeevich

Sakhalin State University

Doctor of technical Sciences, Head of the Department of Computer Science

Abstract

The theoretical and methodological foundations of the theory of fuzzy relational equations are outlined as the basis for solving an inverse multi-stage problem for expert systems of fuzzy diagnostics. The main provisions formulated in the article are illustrated on solving a wide range of tasks. Practical approbation of the theory and methodology of the solution in the package of computer mathematics has been carried out.

Keywords: fuzzy relational equations, fuzzy diagnostics

Введение

Одним из фундаментальных направлений развития систем искусственного интеллект является синтез баз знаний и процедур логического вывода для экспертных систем, которые позволяют аккумулировать неформальные знания экспертов из различных предметных областей и сделать их доступными специалистам в реализациях систем поддержки принятия решений и диагностики.

Учитывая слабую структурированность и неточность информации, используемой при синтезе баз знаний особую сложность, значимость и важность имеют системы нечеткого логического вывода, предназначенные для работы в условиях неопределенности вызванной неполнотой формализации базовых структур и объектов систем на нечетких множествах.

Одной из наиболее сложных задач, решаемых при синтезе нечетких диагностических экспертных систем является проблема получения набора предпосылок, которые привели к текущему состоянию системы. Поэтому задачей настоящего исследования является разработка методологического, методического и математического обеспечения решения задачи диагностирования и восстановления причин, которые привели к имеющимся последствиям с учетом неопределенности и неточности имеющейся информации о функционировании исследуемой системы. Основу методики решения задачи составляет концепция обработки нечетко сформулированных экспертных высказываний, содержащих степени уверенности экспертов о принадлежности параметра системы к соответствующему нечеткому множеству, определяющему используемую лингвистическую переменную.

Возможности современных средств вычислительной техники позволяют внедрять в процесс исследования трудноформализуемых задач и систем элементы искусственного интеллекта, призванные сократить разрыв между традиционным алгоритмическим программированием и реалиями проблем, для которых характерны нелинейность, самоорганизация, фрактальность и серия неопределенностей, вызванных неточностью, неполнотой, противоречивостью и неформальностью экспертной информации об исследуемом объекте.

Диагностика состояния сложных объектов является одной из ключевых проблем современного этапа развития экспертных систем и систем поддержки принятия решений. На практике именно ситуация, когда исходная информация об объекте исследования известна нечетко является типовой. Особую сложность имеет обратная задача диагностики, основанная на нечетких реляционных уравнениях. Вид соответствий и их композиции определяет трудоемкость используемого количественного метода анализа и влияет на семантическую интерпретируемость полученных решений и вырабатываемых на их основе рекомендаций.

Целью настоящего исследования является разработка теоретических и методологических основ синтеза математического обеспечения нечетких диагностических экспертных систем, ориентированных на решение обратной задачи для нечетких соответствий, а также практическая апробация результатов в пакете компьютерной математики.

1 Решение нечетких реляционных уравнений

1.1 Используемые треугольные нормы и импликаторы

В качестве t -норм рассмотрим три наиболее распространённые:

1. логическое произведение $M(u, v) = \min(u, v)$
2. алгебраическое произведение $P(u, v) = u \cdot v$
3. граничное произведение $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$

Импликаторы могут быть индуцированы по схеме [1]:

$$I = N(T(u, N(v))),$$

где $N(u) = 1 - u$ – стандартный инвертор;

$T(u, v)$ – t -норма.

Исследованию подлежат следующие индуцированные этими нормами импликаторы:

1. импликатор Клина-Дайнеса (Kleene-Dienes) $I_M(u, v) = \max(1 - u, v)$;

2. импликатор $I_P(u, v) = 1 - u + u \cdot v$, индуцированный алгебраическим произведением;

3. импликатор Лукасевича $I_W(u, v) = \min(1 - u + v, 1)$.

1.2 Простейшие нечеткие реляционные уравнения

Простейшее нечеткое реляционное уравнение записывается следующим образом:

$$a \circ x = y \quad (a, x, y \in [0, 1]). \quad (1)$$

В зависимости от используемой импликации оно представимо в виде:

$$T(a, x) = y; \quad (2)$$

$$I(a, x) = y; \quad (3)$$

$$I(x, a) = y. \quad (4)$$

Для того, чтобы уравнение (2) имело решение x^0 необходимо и достаточно выполнение условия: $a \geq y$.

Например, уравнение $T(0.2, x) = T(x, 0.2) = 0.7$ не имеет решений.

Формулы для нахождения решения уравнения (2):

$$x^0 = \begin{cases} \begin{cases} [y, 1] & (a = y) \\ y & (a > y) \end{cases} & M(a, x) \\ \frac{y}{a} & (a > 0) & P(a, x) \\ y - a + 1 & W(a, x) \end{cases}.$$

В таблице 1 представлены варианты решений простейших нечетких уравнений при использовании наиболее распространённых t -норм.

Таблица 1. Примеры решений уравнений с различными нормами

t -норма	Уравнение		
	$T(0.3, x) = 0.3$	$T(0.8, x) = 0.7$	$T(0.5, x) = 0.1$
$M(a, x)$	$0.3 \leq x^0 \leq 1$	$x^0 = 0.7$	$x^0 = 0.1$
$P(a, x)$	$x^0 = 1$	$x^0 = 7/8$	$x^0 = 0.2$
$W(a, x)$	$x^0 = 1$	$x^0 = 0.9$	$x^0 = 0.6$

Для того, чтобы уравнение (3) имело решение необходимо и достаточно выполнение условия: $1 - a \leq y$.

Формулы для нахождения решения уравнения (3):

$$x^0 = \begin{cases} \begin{cases} [0, y] & (a = 1 - y) \\ y & (a > 1 - y) \end{cases} & I_M(a, x) \\ \frac{y + a - 1}{a} & (a > 0) & I_P(a, x) \\ a + y - 1 & I_W(a, x) \end{cases}.$$

В таблице 2 приведены решения простейших правых нечетких реляционных уравнений с использованием различных (рассматриваемых) импликаторов.

Таблица 2. Примеры решений правых уравнений

Импликатор	Уравнение		
	$I(0.7, x) = 0.7$	$I(0.7, x) = 0.8$	$I(0.4, x) = 0.6$
$I_M(a, x)$	$x^0 = 0.7$	$x^0 = 0.8$	$0 \leq x^0 \leq 0.6$
$I_P(a, x)$	$x^0 = 4/7$	$x^0 = 5/7$	$x^0 = 0$
$I_W(a, x)$	$x^0 = 0.4$	$x^0 = 0.5$	$x^0 = 0$

Для того, чтобы уравнение (4) имело решение необходимо и достаточно выполнение условия: $a \leq y$.

Например, уравнение $I(x, 0.8) = 0.7$ не имеют решений.

Формулы для нахождения решения уравнения (4):

$$x^0 = \begin{cases} \begin{cases} [1 - y, 1] & (a = y) \\ 1 - y & (a < y) \end{cases} & I_M(x, a) \\ \frac{1 - y}{1 - a} & (a < 1) & I_P(x, a) \\ a - y + 1 & I_W(x, a) \end{cases}.$$

В таблице 3 приведены решения простейших левых нечетких реляционных уравнений с использованием различных (рассматриваемых) импликаторов.

Таблица 3. Примеры решений левых уравнений с различными импликаторами

Импликатор	Уравнение		
	$I(x, 0.7) = 0.7$	$I(x, 0.2) = 0.7$	$I(x, 0.1) = 0.5$
$I_M(x, a)$	$0.3 \leq x^0 \leq 1$	$x^0 = 0.3$	$x^0 = 0.5$
$I_P(x, a)$	$x^0 = 1$	$x^0 = 3/8$	$x^0 = 5/9$
$I_W(x, a)$	$x^0 = 1$	$x^0 = 0.5$	$x^0 = 0.6$

1.3 Полиномиальные уравнения

Термины «полиномиальные уравнения» и уравнения общего вида введены в соответствии с [1].

Исследуется обобщенное уравнение (1) вида:

$$a \circ x = y \left(a, x \in \mathbb{R}^n, y \in [0, 1] \right)$$

или

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = y; (a_j, x_j \in [0, 1]; j = \overline{1, n}).$$

Очевидно, в зависимости от вида используемой импликации в развернутом виде это уравнение может представлено следующим образом:

$$\begin{cases} \max_j (T(a_j, x_j)) = y \\ \min_j (I(a_j, x_j)) = y; (j = \overline{1, n}) \\ \min_j (I(x_j, a_j)) = y \end{cases}$$

Исследуем, например, первое из представленных уравнений:

$$\max_j (T(a_j, x_j)) = y; (j = \overline{1, n}) \quad (5)$$

В работе [2] приведено обобщенное исследование для других вариантов импликации.

Утверждение.

Для того, чтобы уравнение (5) имело решение $(x_1^0 \ x_2^0 \ \dots \ x_n^0)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие.

$$\exists k(1 \leq k \leq n): a_k \geq y.$$

Необходимость $(\exists (x_1^0 \ x_2^0 \ \dots \ x_n^0) \Rightarrow \exists k(1 \leq k \leq n): a_k \geq y):$

Пусть $(x_1^0 \ x_2^0 \ \dots \ x_n^0)$ – решение уравнения (5). Тогда найдется по крайней мере одно число $1 \leq k \leq n$ для которого выполняется равенство $T(a_k, x_k^0) = y$, а это значит, что $a_k \geq y \odot$

Достаточность $(\exists k(1 \leq k \leq n): a_k \geq y \Rightarrow \exists (x_1^0 \ x_2^0 \ \dots \ x_n^0)):$

Пусть $\exists k(1 \leq k \leq n): a_k \geq y$. Тогда хотя бы одно из уравнений $T(a_k, x_k) = y$ имеет решение, следовательно для (5):

$$\max_j (T(a_j, x_j)) = \max(T(a_1, x_1) \leq y, T(a_2, x_2) \leq y, \dots, T(a_k, x_k) = y, \dots) = y.$$

Компоненты максимального решения уравнения определяются следующим образом:

$$\bar{x}_j^0 = \begin{cases} 1 & a_j \leq y \\ r & a_j > y \end{cases} \quad (j = \overline{1, n}), \text{ где}$$

$$r = \begin{cases} y & M(a_j, x_j) \\ y/a_j & P(a_j, x_j) \\ y - a_j + 1 & W(a_j, x_j) \end{cases}.$$

Компоненты минимального решения уравнения:

$$\underline{x}_j^0(k) = \begin{cases} 0 & a_j < y \\ r & i = Q_k \\ 0 & i \neq Q_k \end{cases} \quad (j = \overline{1, n}; k = \overline{1, |Q|}),$$

где $Q = \{j : r_j \geq y \ (j = \overline{1, n})\}$.

Очевидно, если ни одно из простейших уравнений $T(a_j, x_j) = y$ не имеет решений, то и множество решений полиномиального уравнения пусто.

Пример. Рассмотрим нечеткое реляционное уравнение [3]:

$$a \circ x = y = (0.2 \ 0.7 \ 0.5 \ 0.8) \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (0.7).$$

Используя max- T композицию получим:

$$\max_j (T(a_j, x_j)) = y; \quad (j = \overline{1, 4}). \quad (6)$$

Очевидно, при различных используемых треугольных нормах M , P и W уравнение (6) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \max(\min(0.2, x_1), \min(0.7, x_2), \min(0.5, x_3), \min(0.8, x_4)) = 0.7 \\ \max((0.2 \cdot x_1), (0.7 \cdot x_2), (0.5 \cdot x_3), (0.8 \cdot x_4)) = 0.7 \\ \max(\max(0.2 + x_1 - 1, 0), \max(0.7 + x_2 - 1, 0), \max(0.5 + x_3 - 1, 0), \max(0.8 + x_4 - 1, 0)) = 0.7 \end{cases}$$

Решения уравнений при различных нормах представлены в таблице 4.

Таблица 4. Сравнение решений уравнения

T	x^0	$\bar{x}^0$	$\underline{x}^0$
M	$0 \leq x_1^0 \leq 1 \begin{cases} 0 \leq x_2^0 < 0.7 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & x_4^0 = 0.7 \\ 0.7 \leq x_2^0 \leq 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.7 \end{cases}$	$(1 1 1 0.7)$	$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$
P	$0 \leq x_1^0 \leq 1 \begin{cases} 0 \leq x_2^0 < 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & x_4^0 = 7/8 \\ x_2^0 = 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & 0 \leq x_4^0 \leq 7/8 \end{cases}$	$(1 1 1 7/8)$	$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

W	$0 \leq x_1^0 \leq 1$	$\begin{bmatrix} 0 \leq x_2^0 < 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & x_4^0 = 0.9 \\ x_2^0 = 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.9 \end{bmatrix}$	$(1 1 1 0.9)$	$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$
---	-----------------------	---	---------------	---

Решение осуществлялось в пакете символьной математики *Wolfram Mathematica* [4].

1.4 Системы полиномиальных уравнений

В данном случае система имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}; (a_{ij}, x_j, y_i \in [0,1]; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}).$$

И в зависимости от вида используемой импликации сводится к одному из следующих уравнений:

$$\begin{cases} \max_j (T(a_{ij}, x_j)) = y_i \\ \min_j (I(a_{ij}, x_j)) = y_i \end{cases}; (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}).$$

Пример исследуем известную нечеткую задачу диагностики [5, 6]:

$$a \circ x = y = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.7 & 1.0 \\ 0.1 & 0.9 & 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 1.0 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

При использовании, например, *max-min* композиции система примет вид:

$$\begin{cases} \max(\min(1.0, x_1), \min(0.8, x_2), \min(0.7, x_3), \min(1.0, x_4)) = 0.9 \\ \max(\min(0.1, x_1), \min(0.9, x_2), \min(0.8, x_3), \min(0.5, x_4)) = 0.1 \\ \max(\min(0.2, x_1), \min(1.0, x_2), \min(0.5, x_3), \min(0.2, x_4)) = 0.2 \end{cases}$$

В таблице 5 представлены результаты решения трех уравнений и всей системы для *t*-нормы *M*.

Таблица 5. Итоговая таблица с решениями задачи

<i>i</i>	x^0	$\bar{x}^0$	$\underline{x}^0$
1	$\begin{bmatrix} 0 \leq x_1^0 < 0.9 & 0 \leq x_2^0 \leq 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & x_4^0 = 0.9 \\ x_1^0 = 0.9 & 0 \leq x_2^0 \leq 1 & 0 \leq x_3^0 \leq 1 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.9 \end{bmatrix}$	$(0.9 1 1 0.9)$	$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$
2	$\begin{bmatrix} 0 \leq x_1^0 < 0.1 & 0 \leq x_2^0 < 0.1 & \begin{bmatrix} 0 \leq x_3^0 < 0.1 & x_4^0 = 0.1 \\ x_3^0 = 0.1 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.1 \end{bmatrix} \\ 0.1 \leq x_1^0 \leq 1 & 0 \leq x_2^0 \leq 0.1 & 0 \leq x_3^0 \leq 0.1 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.1 \end{bmatrix}$	$(1 0.1 0.1 0.1)$	$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$

3	$\left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_1^0 < 0.2 & \left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_2^0 < 0.2 & \left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_3^0 < 0.2 & 0.2 \leq x_4^0 \leq 1 \\ x_3^0 = 0.2 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array} \end{array} \right. \\ \hline x_2^0 = 0.2 & 0 \leq x_3^0 \leq 0.2 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array} \right. \\ \hline 0.2 \leq x_1^0 \leq 1 & 0 \leq x_2^0 \leq 0.2 & 0 \leq x_3^0 \leq 0.2 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array} \right]$	$(1 \mid 0.2 \mid 0.2 \mid 1)$	$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$
{:}	$x_1^0 = 0.9 \mid 0 \leq x_2^0 \leq 0.1 \mid 0 \leq x_3^0 \leq 0.1 \mid 0 \leq x_4^0 \leq 0.1$	$(0.9 \mid 0.1 \mid 0.1 \mid 0.1)$	$(0.9 \mid 0 \mid 0 \mid 0)$

Таблица 6 содержит решения уравнений, входящих в систему при использовании t -нормы P .

Таблица 6. Решения уравнений при использовании алгебраического произведения

i	x^0	$\bar{x}^0$	$\underline{x}^0$
1	$\left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_1^0 < 0.9 & 0 \leq x_2^0 \leq 1 \mid 0 \leq x_3^0 \leq 1 \mid x_4^0 = 0.9 \\ \hline x_1^0 = 0.9 & 0 \leq x_2^0 \leq 1 \mid 0 \leq x_3^0 \leq 1 \mid 0 \leq x_4^0 \leq 0.9 \end{array} \right]$	$(0.9 \mid 1 \mid 1 \mid 0.9)$	$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$
2	$\left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_1^0 < 1 & \left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_2^0 < 1/9 & \left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_3^0 < 1/8 & x_4^0 = 1/5 \\ x_3^0 = 1/8 & 0 \leq x_4^0 \leq 1/5 \end{array} \right. \\ \hline x_2^0 = 1/9 & 0 \leq x_3^0 \leq 1/8 & 0 \leq x_4^0 \leq 1/5 \end{array} \right. \\ \hline x_1^0 = 1 & 0 \leq x_2^0 \leq 1/9 & 0 \leq x_3^0 \leq 1/8 & 0 \leq x_4^0 \leq 1/5 \end{array} \right]$	$(1 \mid 1/9 \mid 1/8 \mid 1/5)$	$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$
3	$\left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_1^0 < 1 & \left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_2^0 < 0.2 & \left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_3^0 < 0.4 & x_4^0 = 1 \\ x_3^0 = 0.4 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array} \right. \\ \hline x_2^0 = 0.2 & 0 \leq x_3^0 \leq 0.4 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array} \right. \\ \hline x_1^0 = 1 & 0 \leq x_2^0 \leq 0.2 & 0 \leq x_3^0 \leq 0.4 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array} \right]$	$(1 \mid 0.2 \mid 0.4 \mid 1)$	$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$

Очевидно, пересечение максимальных решений отдельных уравнений $(0.9 \mid 1/9 \mid 1/8 \mid 1/5)$ не является (максимальным) решением системы, т.е. система, при использовании в качестве t -нормы алгебраического произведения, имеет пустое множество решений.

Результаты решения уравнений при использовании t -нормы W приведены в таблице 7.

Таблица 7. Решения уравнений при использовании граничного произведения

i	x^0	$\bar{x}^0$	$\underline{x}^0$
1	$\left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_1^0 < 0.9 & 0 \leq x_2^0 \leq 1 \mid 0 \leq x_3^0 \leq 1 \mid x_4^0 = 0.9 \\ \hline x_1^0 = 0.9 & 0 \leq x_2^0 \leq 1 \mid 0 \leq x_3^0 \leq 1 \mid 0 \leq x_4^0 \leq 0.9 \end{array} \right]$	$(0.9 \mid 1 \mid 1 \mid 0.9)$	$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$

2	$\begin{array}{c c c c} 0 \leq x_1^0 < 1 & \begin{array}{c c} 0 \leq x_2^0 < 0.2 & \begin{array}{c c} 0 \leq x_3^0 < 0.3 & x_4^0 = 0.6 \\ x_3^0 = 0.3 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.6 \end{array} \\ \hline x_2^0 = 0.2 & 0 \leq x_3^0 \leq 0.3 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.6 \end{array} \\ \hline x_1^0 = 1 & 0 \leq x_2^0 \leq 0.2 & 0 \leq x_3^0 \leq 0.3 & 0 \leq x_4^0 \leq 0.6 \end{array}$	$(1 \mid 0.2 \mid 0.3 \mid 0.6)$	$\left(\begin{array}{c c c c} 0 & 0 & 0 & 0.6 \\ \hline 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ \hline 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$
3	$\begin{array}{c c c c} 0 \leq x_1^0 < 1 & \begin{array}{c c} 0 \leq x_2^0 < 0.2 & \begin{array}{c c} 0 \leq x_3^0 < 0.7 & x_4^0 = 1 \\ x_3^0 = 0.7 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array} \\ \hline x_2^0 = 0.2 & 0 \leq x_3^0 \leq 0.7 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array} \\ \hline x_1^0 = 1 & 0 \leq x_2^0 \leq 0.2 & 0 \leq x_3^0 \leq 0.7 & 0 \leq x_4^0 \leq 1 \end{array}$	$(1 \mid 0.2 \mid 0.7 \mid 1)$	$\left(\begin{array}{c c c c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ \hline 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$
$\{\cdot\}$	$x_1^0 = 0.9 \mid x_2^0 = 0.2 \mid 0 \leq x_3^0 \leq 0.3 \mid 0 \leq x_4^0 \leq 0.6$	$(0.9 \mid 0.2 \mid 0.3 \mid 0.6)$	$(0.9 \mid 0.2 \mid 0 \mid 0)$

Таким образом, очевидно, выбор функции композиции нечетких соответствий приводит к различным решениям обратной задачи [7, 8] (задачи диагностики). Содержательная интерпретация получаемых решений определяется спецификой исследуемой предметной области [9, 10].

1.5 Уравнения общего вида

Представление нечеткого реляционного уравнения в общем виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1k} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mk} \end{pmatrix},$$

$$(a \in \mathbb{R}^{mn}, x \in \mathbb{R}^{nk}, y \in \mathbb{R}^{mk}; \forall a, x, y \in [0, 1]).$$

Уравнение общего вида распадается на m независимых систем из k полиномиальных уравнений:

$$\begin{cases} \max_j (T(a_{ij}, x_{jl})) = y_{il} \quad (i = \overline{1, m}) \\ \min_j (I(a_{ij}, x_{jl})) = y_{il} \quad (i = \overline{1, m}) \end{cases}; (l = \overline{1, k}; j = \overline{1, n}).$$

1.6 Решение практической задачи

Применим изложенную методику и методы решения нечетких реляционных уравнений для практической реализации выработки рекомендаций выпускникам вуза по выбору вида их дальнейшей профессиональной деятельности [11]. Дополним исследование решением обратной задачи, позволяющей определить область рекомендаций по степени изучения учебных дисциплин для обеспечения высокоуровневой работы выпускников в той или иной сфере целевой профессиональной деятельности.

В соответствии с исследованием определяем множества:

$A = (a_i)_{i=\overline{1, m}}$ содержит фамилию, имя и отчество выпускника;

$B = (b_j)_{j=\overline{1,n}}$ – перечень групп изучаемых дисциплин, по которым должен быть определен уровень знаний каждого выпускника;

$C = (c_l)_{l=\overline{1,k}}$ – перечень видов будущей профессиональной деятельности выпускников.

1. Решение левой прямой задачи.

Пусть известны соответствия:

$$X = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0.5 & 0.9 & 0.8 \\ a_2 & 0.5 & 0.8 & 0.6 \\ a_3 & 0.7 & 0.8 & 0.6 \\ a_4 & 0.8 & 0.5 & 0.9 \\ a_5 & 0.6 & 0.5 & 0.8 \end{array}; A = \begin{array}{c|ccc} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline b_1 & 0.9 & 0.7 & 0.9 \\ b_2 & 0.5 & 0.9 & 0.7 \\ b_3 & 0.7 & 0.5 & 0.8 \end{array}.$$

Тогда решение прямой задачи, например, с помощью импликатора Лукасевича будет следующим:

$$Y = \begin{array}{c|ccc} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline a_1 & 0.6 & 0.7 & 0.8 \\ a_2 & 0.7 & 0.9 & 0.9 \\ a_3 & 0.7 & 0.9 & 0.9 \\ a_4 & 0.8 & 0.6 & 0.9 \\ a_5 & 0.9 & 0.7 & 1.0 \end{array}$$

В соответствии с интерпретацией результата, предложенной в [11] выпускнику a_1 следует рекомендовать выбрать направление производственной деятельности c_3 . Однако наивысший рейтинг на занятие должности, связанной с деятельностью c_3 у претендента a_5 и т.д.

2. Решение обратной задачи $X \circ A = Y$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 & 0.9 \\ 0.5 & 0.9 & 0.7 \\ 0.7 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.9 & 0.9 \\ 0.7 & 0.9 & 0.9 \\ 0.8 & 0.6 & 0.9 \\ 0.9 & 0.7 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Для сокращения записи приведем решение одной системы нечетких полиномиальных уравнений только для первого претендента:

$$\begin{cases} \min(\min(1 - x_{11} + 0.9, 1), \min(1 - x_{12} + 0.5, 1), \min(1 - x_{13} + 0.7, 1)) = 0.6 \\ \min(\min(1 - x_{11} + 0.7, 1), \min(1 - x_{12} + 0.9, 1), \min(1 - x_{13} + 0.5, 1)) = 0.7 \\ \min(\min(1 - x_{11} + 0.9, 1), \min(1 - x_{12} + 0.7, 1), \min(1 - x_{13} + 0.8, 1)) = 0.8 \end{cases}$$

В табл. 8 представлены решения трех уравнений и системы в целом.

Таблица 8. Решение системы нечетких уравнений с импликатором Лукасевича

l	x^0	$\bar{x}^0$	$\underline{x}^0$
1	$0 \leq x_{11}^0 \leq 1 \mid x_{12}^0 = 0.9 \mid 0 \leq x_{13}^0 \leq 1$	$(1 \mid 0.9 \mid 1)$	$(0 \mid 0.9 \mid 0)$
2	$\left[\begin{array}{c c c} 0 \leq x_{11}^0 < 1 & 0 \leq x_{12}^0 \leq 1 & x_{13}^0 = 0.8 \\ \hline x_{11}^0 = 1 & 0 \leq x_{12}^0 \leq 1 & 0 \leq x_{13}^0 \leq 0.8 \end{array} \right]$	$(1 \mid 1 \mid 0.8)$	$\left(\left[\begin{array}{c c c} 0 & 0 & 0.8 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \right)$
3	$0 \leq x_{11}^0 \leq 1 \left[\begin{array}{c c} 0 \leq x_{12}^0 < 0.9 & x_{13}^0 = 1 \\ \hline x_{12}^0 = 0.9 & 0 \leq x_{13}^0 \leq 1 \end{array} \right]$	$(1 \mid 0.9 \mid 1)$	$\left(\left[\begin{array}{c c c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0.9 & 0 \end{array} \right] \right)$
$\{ \vdots$	$\left[\begin{array}{c c c} 0 \leq x_{11}^0 < 1 & x_{12}^0 = 0.9 & x_{13}^0 = 0.8 \\ \hline x_{11}^0 = 1 & x_{12}^0 = 0.9 & 0 \leq x_{13}^0 \leq 0.8 \end{array} \right]$	$(1 \mid 0.9 \mid 0.8)$	$\left(\left[\begin{array}{c c c} 0 & 0.9 & 0.8 \\ \hline 1 & 0.9 & 0 \end{array} \right] \right)$

В полученном решении обратной задачи, очевидно, наивысший нечеткий рейтинг имеет группа дисциплин b_2 .

2 Основы теории многокаскадных композиций нечетких соответствий

Пусть $(M_0 = M), M_1, M_2, \dots, M_s, N$ – непустые конечные четкие множества.

Многокаскадным нечетким реляционным уравнением (правым) называется уравнение вида:

$$\tilde{A} \circ \tilde{X} = \tilde{Y}, \quad (7)$$

где $\tilde{A} = \bigcirc_{i=1}^s \tilde{A}_i(M_{i-1}, M_i)$ – последовательность композиций нечетких

соответствий $\tilde{A}_i = \iint_{M_{i-1} \times M_i} \frac{\mu_{\tilde{A}_i}(m_{i-1}, m_i)}{(m_{i-1}, m_i)} (\forall m_{(\cdot)} \in M_{(\cdot)}),$

заданных на $M_{i-1} \times M_{i+1}$ функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}_i \circ \tilde{A}_{i+1}}(m_{i-1}, m_{i+1}) = \left[\begin{array}{c} \sup T \\ \inf I \end{array} \left(\mu_{\tilde{A}_i}(m_{i-1}, m_i), \mu_{\tilde{A}_{i+1}}(m_i, m_{i+1}) \right) \right] (\forall m_{(\cdot)} \in M_{(\cdot)}); \quad (8)$$

$$\tilde{X} = \tilde{X}(M_s, N) = \iint_{M_s \times N} \frac{\mu_{\tilde{X}}(m_s, n)}{(m_s, n)} (\forall m_s \in M_s; \forall n \in N) \quad - \quad \text{входное}$$

соответствие (предпосылки);

$$\tilde{Y} = \tilde{Y}(M, N) = \iint_{M \times N} \frac{\mu_{\tilde{Y}}(m, n)}{(m, n)} (\forall m \in M; \forall n \in N) \quad - \quad \text{выходное}$$

(замыкающее) соответствие (заключения) с областью отправления M и областью прибытия N .

Пусть для уравнения вида (7) определены правила композиций и задана последовательность композиций нечетких соответствий $\tilde{A}$.

Прямой задачей называется задача нахождения представления выходного нечеткого соответствия $\tilde{Y}(M, N)$ при известном представлении входного нечеткого соответствия $\tilde{X}(M_s, N)$

Обратной задачей называется задача нахождения представления входного нечеткого соответствия $\tilde{X}(M_s, N)$ при известном представлении выходного нечеткого соответствия $\tilde{Y}(M, N)$.

Очевидно решение прямой задачи тривиально и может быть найдено по формулам (8).

2.1 Сведение к оптимизационной задаче

Трудоемкость решения обратной задачи, как правило, высока, более того, множество решений может быть пусто. В этом случае формулируется следующая экстремальная (оптимизационная) задача [12, 13]:

$$(D, f): f = \|A \circ X - Y^0\| \rightarrow \min$$

$$D = \{x \in X : \forall x \in [0, 1]\} \quad , \quad (9)$$

где $Y^0(M, N)$ – наблюдаемое соответствие.

Решение задачи (9) позволяет найти искомое нечеткое соответствие, которое в наивысшей степени отвечает условию минимизации критерия оптимизации – нормы отклонения расчетных величин от наблюдаемых.

2.2 Практическая апробация

Рассмотрим простейшую двухкаскадную систему вида (7) в матричной форме [3]:

$$A \circ B \circ X = Y. \quad (10)$$

Пусть: $A = \begin{pmatrix} 0.92 & 0.77 & 0.56 \\ 0.85 & 0.75 & 0.66 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.73 & 0.44 & 0.84 \\ 0.44 & 0.61 & 0.8 & 0.88 \\ 0.62 & 0.91 & 0.57 & 0.53 \end{pmatrix}$ – заданные

нечеткие соответствия, составляющие композицию;

$Y^0 = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.63 \\ 0.91 & 0.68 \end{pmatrix}$ – наблюдаемое соответствие;

$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{pmatrix}$ – искомое соответствие.

Очевидно, модель (10) на базе (правого) импликатора Лукасевича может быть записана в виде:

$$\min \left(\min_{k=1,4} \left(1 - \min_{l=1,3} (1 - a_{il} + b_{lk}, 1) \right) + x_{kj}, 1 \right) = y_{ij}^0; \quad (j = 1, 2 \quad (i = 1, 2)).$$

Имеем две системы ($j = 1, 2$) из двух уравнений ($i = 1, 2$).

Обе системы имеют решение (в данном простейшем примере). Расчеты выполнялись в среде пакета символьной математики *Wolfram Mathematica* [4], результаты округлены до двух знаков после запятой. Продолжительность поиска решения составляет, примерно, 5 секунд.

$$\left\{ \begin{array}{l|l|l|l} 0.60 \leq x_{11} \leq 1 & 0.77 \leq x_{21} \leq 1 & 0.50 < x_{31} \leq 1 & x_{41} = 0.78 \\ \hline 0.37 \leq x_{12} \leq 1 & 0.54 \leq x_{22} \leq 1 & 0.27 < x_{32} \leq 1 & x_{42} = 0.55 \end{array} \right.$$

В данном случае оптимизационная модель (9) сводится к двум экстремальным задачам:

$$\begin{aligned} & \|y_{11}(x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}) - y_{11}^0\| + \|y_{21}(x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}) - y_{21}^0\| \rightarrow \min \\ & \|y_{12}(x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}) - y_{12}^0\| + \|y_{22}(x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}) - y_{22}^0\| \rightarrow \min \\ & \forall x \in [0, 1] \end{aligned}$$

Решение методом имитации отжига:

$$X = \begin{pmatrix} 0.68 & 0.81 \\ 0.77 & 0.85 \\ 0.51 & 0.96 \\ 0.78 & 0.55 \end{pmatrix}.$$

Продолжительность поиска решения составляет половину секунды

Заключение

Работа является продолжением исследований, проводимых автором на протяжении нескольких лет [14, 15].

Результатом проведенных исследований явилась разработка унифицированной теории решения обратной задачи для нечетких соответствий. Методологические и методические аспекты разработки математического обеспечения экспертных систем нечеткой диагностики имеют имеет широкий спектр применений в различных предметных областях [7, 9, 12, 16].

Основные положения исследования получили практическую апробацию в среде современной системы компьютерной математики.

Библиографический список

1. Блюмин С. Л., Шуйкова И. А., Сараев П. В., Черпаков И. В. Нечеткая логика: алгебраические основы и приложения. Липецк: ЛЭГИ. 2002. 111с.
2. Осипов Г.С. Исследование соответствий в задаче нечеткой диагностики // «Вопросы современной науки»: коллект. науч. монография; [под ред. Е.Е. Еникеева]. М.: Изд. Интернаука, 2018. С. 41-62. Т. 29. DOI: 10.18411/InterNauka-2018-29.
3. Осипов Г.С. Методологические основы решения обратной задачи для многокаскадных нечетких реляционных уравнений // Современные научные исследования и разработки. 2018. № 10(27). С. 1095-1098. DOI: 10.18411/Olimp-2018-10.

4. Осипов Г. С., Вашакидзе Н. С., Филиппова Г. В. О решении обратных задач для нечетких соответствий в среде Wolfram Mathematica // Постулат. 2018. № 1 (27). С. 42. DOI: 10.18411/Postulat-2018-1.
5. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. СПб.: БХВ-Петербург. 2005. 736 с.
6. Осипов Г.С. Исследование влияния функций пересечения множеств в задаче нечеткой диагностики // Научные тенденции: Вопросы точных и технических наук. Сборник научных трудов по материалам XIV международной научно-практической конференции. Санкт-Петербург, 12 февраля 2018 г. Изд. ЦНК МНИФ «Общественная наука», 2018. С. 14-19.
7. Осипов Г.С. Влияние вида импликатора на решение обратной задачи нечеткой диагностики // Постулат. 2018. № 2. С. 55.
8. Осипов Г. С. Использование функции логического произведения в обратной задаче для нечетких реляционных уравнений // Материалы сборника научных трудов XXXI международной научно-практической конференции «MODERNSCIENCE: THEORETICAL AND PRACTICAL LOOK» [Электронный ресурс]. М.: Издательство: «Олимп», 29 января 2018. С. 18-22. URL: <http://olimpiks.ru/d/1340546/d/mst-31.pdf>. (Дата обращения: 23.03.2019).
9. Осипов Г.С. Об обратной задаче синтеза состава лекарственных препаратов // Тенденции развития науки и образования. 2018. № 41-3. С. 29-35.
10. Осипов Г.С. О решении обратной задачи о назначениях в нечеткой постановке // В сборнике: 5th International Conference «Science and Society - Methods and Problems of Practical Application». Accent Graphics Communications & Publishing. 2018. PP. 3-6. DOI: 10.29013/V-Conf-Canada-5-3-6
11. Айзинов С. Д., Сазонов А. Е., Солодовниченко М. Б. Разработка нечеткой модели выбора вида профессиональной деятельности выпускниками вуза // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. 2017. Т. 9. № 6. С. 1330–1337. DOI: 10.21821/2309-5180-2017-9-6-1330-1337
12. Осипов Г.С. Проблема нечеткой диагностики как оптимизационная задача // European Journal of Technical and Natural Sciences, Premier Publishing s.r.o. Vienna. 4. 2018, Pp. 29-32. DOI: 10.29013/EJTNS-18-4-29-31
13. Осипов Г.С. Оптимизационная модель обратной многоэтапной задачи с нечеткими соответствиями // В сборнике: Молодая наука XXI века: проблемы, поиски, решения Сборник научных статей по итогам Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. 2018. С. 17-19. DOI: 10.18411/SPbCSA-2018-9.
14. Вашакидзе Н.С., Осипов Г.С. Построение диагностических нечетких экспертных систем//Интернет-журнал СахГУ: Наука, образование, общество. 2010. Т. 2010-11. № 2. С. 106.
15. Экономическая информатика/Колесов Д. Н., Конюховский П. В., Осипов Г.С., Евстратчик С. В. и др.; под ред. П. В. Конюховского, Д. Н. Колесова.

СПб.: Питер (Санкт-Петербург). 2001. 555 с.

- 16.Осипов Г.С. Исследование нечеткой задачи о назначениях // В сборнике: Общие вопросы мировой науки Collection of scientific papers on materials IV International Scientific Conference. International United Academy of Sciences. 2018. С. 30-35. DOI: 10.18411/gq-31-03-2018-06.