УДК 517.984, 54.534, 51.74

Метод решения задачи идентификации жесткостей опор балки ступенчато-переменного

Хусаинова Камилла Ильдаровна
Нефтекамский филиал Башкирского государственного университета
студент

Сафина Гульнара Фриловна
Нефтекамский филиал Башкирского государственного университета
к.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования и информационной безопасности

Аннотация
В статье предложен метод решения обратной задачи идентификации жесткостей шарнирных опор балки ступенчато-переменного сечения по известным значениям частот ее свободных колебаний. Метод сведен к решению системы нелинейных уравнений относительно искомых коэффициентов. По ходу решения системы получены математические модели для определения коэффициентов жесткости шарнирных опор. Приведен пример решения обратной задачи диагностирования краевых условий.
Ключевые слова: балка ступенчато-переменного сечения, обратная задача, собственные частоты, идентификация жесткостей опор балки, метод решения

The method of solving the problem of identification of stiffness of the supports beams of the step-variable section

Khusainova Kamilla Ildarovna
Neftekamsk Branch of Bashkir State University
student

Safina Gulnara Frilovna
Neftekamsk Branch of Bashkir State University
candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of mathematical modeling and information security

Abstract
The article proposed a method for solving the inverse problem of identification of the stiffness of the springs on the torsion hinge supports the beam on the known frequencies of their oscillations. The method is reduced to solving a system of nonlinear equations of the desired coefficients. In the course of solving the system, mathematical models for determining the stiffness coefficients of the hinge supports are obtained. An example of solving the inverse problem of diagnosing boundary conditions is given.

Keywords: beam of step and variable section, reverse task, natural frequencies, identification of rigidities of support of a beam, decision method

Представленная работа относится к исследованиям в области идентификации характеристик или условий закреплений механических систем по известным частотам их свободных колебаний [1–3].

Рассмотрена балка длины L ступенчато-переменного сечения (рисунок 1). Балка моделируется двумя сегментами с жесткостями EI_i, длинами l_i ($i=1{,}2)$ и с углом поворота φ между ними.

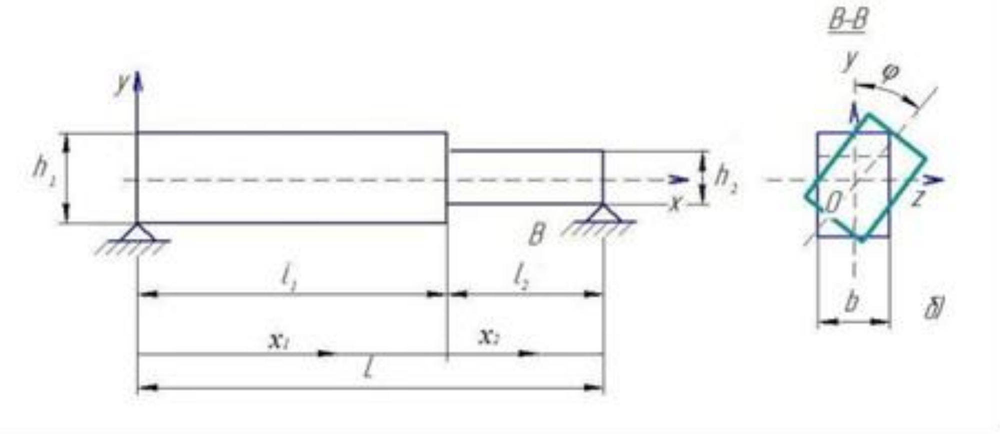

Рисунок 1 – Модель балки ступенчато-переменного сечения

В работе [1] уравнения свободных поперечных колебаний сегментов балки рассмотрены в виде:

$$EI_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} + \rho A_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0, \quad (i = 1{,}2), \tag{1}$$

в которых $x_i (i = 1{,}2)$ – локальные координаты, $w_i = w_i (x_i, t)$ – прогиб i-го сегмента, E и ρ – модуль Юнга и погонная плотность материала балки, $I_i = \dfrac{bh_i^3}{12}$ и $A_i = b_i h_i$ – момент инерции и площадь поперечного сечения i-го сегмента, причем $\alpha^4 = \cos^2\varphi + \left(\dfrac{b}{h}\right)^2 \sin^2\varphi$.

После введения безразмерных переменных $\overline{w}_i = \dfrac{w_i}{L}$, $\xi_i = \dfrac{x_i}{L}$, $\tau = \omega_0 t$, $\omega_0 = \dfrac{1}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A}}$, $\bar{l}_i = \dfrac{l_i}{L}$ и представления прогибов в виде $\overline{w}_i = W_i(\xi_i) e^{i\overline{\omega}\tau}$, где $\overline{\omega} = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ – безразмерная собственная частота колебаний, из (1) получены уравнения для сегментов балки:

$$W_1^{IV} - k^4 W_1 = 0, \quad W_2^{IV} - \left(\frac{k}{\alpha}\right)^4 W_2 = 0. \tag{2}$$

Здесь $k^4 = \dfrac{\omega^2 \rho A L^4}{EI}$ – спектральный параметр, содержащий частоту ω колебаний балки.

Для балки ступенчато-переменного сечения рассмотрены граничные условия [2, 3]:

$$\begin{gathered} W_1(0) = 0, \;\; EI_1 W_1''(0) - c_1 W_1'(0) = 0, \\ W_2(\bar{l}_2) = 0, \;\; EI_2 W_2''(\bar{l}_2) + c_2 W_2'(\bar{l}_2) = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

означающие шарнирные опоры концов балки с жесткостями c_1 и c_2 пружин кручения.

Кроме того, учтены условия сопряжения двух сегментов балки в виде:

$$\begin{gathered} W_1(\bar{l}_1) = W_2(0), \quad W_1'(\bar{l}_1) = W_2'(0), \\ I_1 W_1''(\bar{l}_1) = I_2 W_2''(0), \quad I_1 W_1'''(\bar{l}_1) = I_2 W_2'''(0). \end{gathered} \tag{4}$$

В итоге с учетом краевых условий (3) и условий сопряжения (4) получена система восьми однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд D_{ij} $(i = 1,2; \;\; j = 1,2,3,4)$ колебаний балки:

$$\begin{cases} 1D_{11} + 0D_{12} + 1D_{13} + 0D_{14} + 0D_{21} + 0D_{22} + 0D_{23} + 0D_{24} = 0; \\ -k^2 D_{11} - k\dfrac{c_1}{EI} D_{12} + k^2 D_{13} - k\dfrac{c_1}{EI} D_{14} + 0D_{21} + 0D_{22} + 0D_{23} + 0D_{24} = 0; \\ 0D_{11} + 0D_{12} + 0D_{13} + 0D_{14} + \cos\left(\dfrac{k}{\alpha}\bar{l}_2\right) D_{21} + \sin\left(\dfrac{k}{\alpha}\bar{l}_2\right) D_{22} + ch\left(\dfrac{k}{\alpha}\bar{l}_2\right) D_{23} + sh\left(\dfrac{k}{\alpha}\bar{l}_2\right) D_{24} = 0; \\ 0D_{11} + 0D_{12} + 0D_{13} + 0D_{14} + \left(-\left(\dfrac{k}{\alpha}\right)^2 \cos\dfrac{k}{\alpha}\bar{l}_2 - \dfrac{kc_2}{EI\alpha} \sin\dfrac{k}{\alpha}\bar{l}_2\right) D_{21} + \\ + \left(-\left(\dfrac{k}{\alpha}\right)^2 \sin\dfrac{k}{\alpha}\bar{l}_2 + \dfrac{kc_2}{EI\alpha} \cos\dfrac{k}{\alpha}\bar{l}_2\right) D_{22} + \left(\left(\dfrac{k}{\alpha}\right)^2 ch\dfrac{k}{\alpha}\bar{l}_2 + \dfrac{kc_2}{EI\alpha} sh\dfrac{k}{\alpha}\bar{l}_2\right) D_{23} + \\ + \left(\left(\dfrac{k}{\alpha}\right)^2 sh\dfrac{k}{\alpha}\bar{l}_2 + \dfrac{kc_2}{EI\alpha} ch\dfrac{k}{\alpha}\bar{l}_2\right) D_{24} = 0; \\ \cos(k\bar{l}_1) D_{11} + \sin(k\bar{l}_1) D_{12} + ch(k\bar{l}_1) D_{13} + sh(k\bar{l}_1) D_{14} - 1D_{21} + 0D_{22} - 1D_{23} + 0D_{24} = 0; \\ -\sin(k\bar{l}_1) D_{11} + \cos(k\bar{l}_1) D_{12} + sh(k\bar{l}_1) D_{13} + ch(k\bar{l}_1) D_{14} + 0D_{21} - \dfrac{1}{\alpha} D_{22} + 0D_{23} - \dfrac{1}{\alpha} D_{24} = 0; \\ -\cos(k\bar{l}_1) D_{11} - \sin(k\bar{l}_1) D_{12} + ch(k\bar{l}_1) D_{13} + sh(k\bar{l}_1) D_{14} + \alpha^2 D_{21} + 0D_{22} - \alpha^2 D_{23} + 0D_{24} = 0; \\ \sin(k\bar{l}_1) D_{11} - \cos(k\bar{l}_1) D_{12} + sh(k\bar{l}_1) D_{13} + ch(k\bar{l}_1) D_{14} + 0D_{21} + \alpha D_{22} + 0D_{23} - \alpha D_{24} = 0. \end{cases}$$

Далее из условия равенства нулю определителя матрицы последней системы уравнений для задачи (2), (3), (4) стандартным способом получено частотное уравнение [3]:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k^2 & -kC_1 & k^2 & -kC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos k\bar{l}_2 & \sin k\bar{l}_2 & chk\bar{l}_2 & shk\bar{l}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} -k^2\cos k\bar{l}_2 - \\ -kC_2\sin k\bar{l}_2 \end{matrix} & \begin{matrix} -k^2\sin k\bar{l}_2 + \\ +kC_2\cos k\bar{l}_2 \end{matrix} & \begin{matrix} k^2 chk\bar{l}_2 + \\ +kC_2 shk\bar{l}_2 \end{matrix} & \begin{matrix} k^2 shk\bar{l}_2 + \\ +kC_2 chk\bar{l}_2 \end{matrix} \\ \cos k\bar{l}_1 & \sin k\bar{l}_1 & chk\bar{l}_1 & shk\bar{l}_1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -\sin k\bar{l}_1 & \cos k\bar{l}_1 & shk\bar{l}_1 & chk\bar{l}_1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -\cos k\bar{l}_1 & -\sin k\bar{l}_1 & chk\bar{l}_1 & shk\bar{l}_1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \sin k\bar{l}_1 & -\cos k\bar{l}_1 & shk\bar{l}_1 & chk\bar{l}_1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

в котором $C_1 = \dfrac{c_1}{EI_1}$; $C_2 = \dfrac{c_2}{EI_2}$.

Решение прямой задачи (2), (3), (4) позволило определять соответствующие значения частот колебаний балки ступенчато-переменного сечения при известных значениях жесткостей ее шарнирных опор.

В продолжение исследований работы [3] приведем постановку и решение обратной спектральной задачи – задачи идентификации жесткостей пружин на кручении шарнирных опор балки по известным значениям частот ее колебаний.

Итак, обратная задача сводится к определению по значениям частот ω колебаний балки жесткостей c_1 и c_2 ее опор.

При исследовании задачи о колебаниях балки была получена математическая модель (5) в виде частотного определителя. Раскрыв этот определитель, приведем его к виду:

$$\Delta(k) = f_1(k)C_1 + f_2(k)C_2 + f_3(k)C_1C_2 + f_4(k) = 0, \qquad (6)$$

в котором функции $f_j(k)$ $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ выражаются через физические параметры балки и зависят от собственного значения k, а значит и собственной частоты ω колебаний балки:

$$f_1(k)=8k^3(\cos(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\cos(k\bar{l}_2)+\sin(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\sin(k\bar{l}_2)+$$
$$+\cos(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\sin(k\bar{l}_2)-\cos(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)\cos(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2)+$$
$$+\sin(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)\cos(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2)-\sin(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\cos(k\bar{l}_2)-$$
$$-\cos(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)\sin(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2)-\sin(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)\sin(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2));$$

$$f_2(k)=8k^3(\sin(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)\sin(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2)-\sin(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\cos(k\bar{l}_2)+$$
$$+\sin(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)\cos(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2)-\sin(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\sin(k\bar{l}_2)-$$
$$-\cos(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\cos(k\bar{l}_2)+\cos(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\sin(k\bar{l}_2)+$$
$$+\cos(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)\cos(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2)-\cos(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)\sin(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2));$$

(7)

$$f_3(k)=4k^2(2\cos(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\cos(k\bar{l}_2)-2\cos(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)\cos(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2)+$$
$$+sh(k\bar{l}_1)^2ch(k\bar{l}_2)^2-sh(k\bar{l}_1)^2sh(k\bar{l}_2)^2-ch(k\bar{l}_1)^2\cos(k\bar{l}_2)^2+ch(k\bar{l}_1)^2sh(k\bar{l}_2)^2+$$
$$+2\sin(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\sin(k\bar{l}_2)-2\sin(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\sin(k\bar{l}_2)-$$
$$-\cos(k\bar{l}_1)^2\cos(k\bar{l}_2)^2-\cos(k\bar{l}_1)^2\sin(k\bar{l}_2)^2-\cos(k\bar{l}_1)^2\sin(k\bar{l}_2)^2-\sin(k\bar{l}_1)^2\cos(k\bar{l}_2)^2-$$
$$-\sin(k\bar{l}_1)^2\sin(k\bar{l}_2)^2);$$

$$f_4(k)=16k^4(\cos(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)\sin(k\bar{l}_2)ch(k\bar{l}_2)-\sin(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)\cos(k\bar{l}_2)ch(k\bar{l}_2)-$$
$$-\cos(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)\sin(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2)+\sin(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)\cos(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2)).$$

Решим задачу в случае, когда известны первые три собственные частоты колебаний ω_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ балки, а значит соответствующие им собственные значения k_i. Подставляя значения $k_1,\ k_2,\ k_3$ в уравнение (6) получим систему однородных уравнений

$$\begin{cases} f_1(k_1)C_1+f_2(k_1)C_2+f_3(k_1)D=-f_4(k_1); \\ f_1(k_2)C_1+f_2(k_2)C_2+f_3(k_2)D=-f_4(k_2); \\ f_1(k_3)C_1+f_2(k_3)C_2+f_3(k_3)D=-f_4(k_3) \end{cases} \quad (8)$$

в которой $D=C_1C_2$.

Решим полученную систему (8) по методу Крамера. При этом если определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} f_1(k_1) & f_2(k_1) & f_3(k_1) \\ f_1(k_2) & f_2(k_2) & f_3(k_2) \\ f_1(k_3) & f_2(k_3) & f_3(k_3) \end{vmatrix} \quad (9)$$

системы уравнений (8) отличен от нуля, то искомые коэффициенты $C_1,\ C_2$ определяются однозначно по формулам:

$$C_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ C_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (10)$$

в которых

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -f_4(k_1) & f_2(k_1) & f_3(k_1) \\ -f_4(k_2) & f_2(k_2) & f_3(k_2) \\ -f_4(k_3) & f_2(k_3) & f_3(k_3) \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_1(k_1) & -f_4(k_1) & f_3(k_1) \\ f_1(k_2) & -f_4(k_2) & f_3(k_2) \\ f_1(k_3) & -f_4(k_3) & f_3(k_3) \end{vmatrix}. \qquad (11)$$

Введенный новый параметр D определяется как

$$D = \frac{\Delta_3}{\Delta};$$

где

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f_1(k_1) & f_2(k_1) & -f_4(k_1) \\ f_1(k_2) & f_2(k_2) & -f_4(k_2) \\ f_1(k_3) & f_2(k_3) & -f_4(k_3) \end{vmatrix}.$$

Тогда должно выполняться равенство

$$\frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta}. \qquad (12)$$

По ходу вывода формул доказана следующая теорема:

Теорема: *Если известны три ненулевые собственные частоты* ω_i *(соответствующие им значения* k_i*) колебаний балки, и, определить матрицы системы (8) отличен от нуля, то коэффициенты* c_1, c_2 *определяются однозначно по формулам (9)-(11).*

Теорема дает метод решения обратной спектральной задачи, с помощью которого можно судить о величине коэффициентов жесткостей опор балки ступенчато-переменного сечения.

Применение метода рассмотрим на конкретном примере.

Пример. Даны собственные значения $k_1 = 9{,}26658$; $k_2 = 12{,}43919$; $k_3 = 18{,}75845$, соответствующие первым трем частотам колебаний балки ступенчато-переменного сечения, а также физические параметры

$$E = 2 \cdot 10^{11} \frac{H}{м^2}; \; I_1 = I_2 = I = 0{,}5 \cdot 10^{-5} м^4; \; l_1 = l_2 = 0{,}5 м; \; b = h = 0{,}1 м.$$

Найти коэффициенты жесткости c_1 и c_2 пружин на кручение шарнирных опор балки.

Решение. Подставляя значения k_1, k_2, k_3, а также заданные физические параметры в (7) получим:

$$f_1(k_1) = -0{,}3855 \cdot 10^8; \quad f_1(k_2) = 0{,}2175 \cdot 10^{10}; \quad f_1(k_3) = 0{,}4023 \cdot 10^{13};$$
$$f_2(k_1) = 0{,}2795 \cdot 10^8; \quad f_2(k_2) = -0{,}1682 \cdot 10^{10}; \quad f_2(k_3) = -0{,}3349 \cdot 10^{13};$$
$$f_3(k_1) = -572429{,}293; \quad f_3(k_2) = 0{,}1982 \cdot 10^8; \quad f_3(k_3) = 0{,}1795 \cdot 10^{11};$$
$$f_4(k_1) = -0{,}9831 \cdot 10^8; \quad f_4(k_2) = 0{,}6135 \cdot 10^{10}; \quad f_4(k_3) = 0{,}1263 \cdot 10^{14}.$$

Далее по найденным формулам (9), (11) имеем:

$$\Delta = 0{,}3876 \cdot 10^{26}; \; \Delta_1 = 0{,}3876 \cdot 10^{26}; \; \Delta_2 = 0{,}1938 \cdot 10^{27}.$$

Тогда согласно (10) определяем следующие безразмерные параметры:

$$C_1 = 1;\ \ C_2 = 5.$$

Тогда с учетом равенств $C_1 = \frac{c_1}{EI_1}$, $C_2 = \frac{c_2}{EI_2}$, определяются размерные значения коэффициентов жесткостей опор балки:

$$c_1 = 1 \cdot 10^6 \frac{Н}{м};\ \ c_2 = 5 \cdot 10^6 \frac{Н}{м}.$$

Заметим также, что при этом равенство (12) выполняется, и именно при заданных значениях $c_1 = 1 \cdot 10^6 \frac{Н}{м}$, $c_2 = 5 \cdot 10^6 \frac{Н}{м}$ коэффициентов жесткости определяются значения спектральных параметров $k_1,\ k_2,\ k_3$.

Предложенный метод может быть использован и при решениях других подобных краевых задач по свободным колебаниям распределенных механических систем или их составляющих.

Библиографический список

1. Доев В.С. Поперечные колебания балок. М.: КНОРУС, 2016. 412 с.
2. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х томах. Т.1 / Под ред. А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1983.
3. Сафина Г.Ф., Хусаинова К.И. Исследования поперечных колебаний шарнирно-опертой балки ступенчато-переменного сечения // Физическое образование в ВУЗах. 2018. Т. 24. № 1S. С.111-113.