УДК 517.984, 54.534, 51.74

Обратная задача по изгибным колебаниям балки на упругом основании

Зарипова Эльвира Марселевна
Нефтекамский филиал Башкирского государственного университета
студент

Сафина Гульнара Фриловна
Нефтекамский филиал Башкирского государственного университета
к.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования и информационной безопасности

Аннотация
В статье представлены результаты решения прямой задачи изгибных колебаний балки, лежащей на упругом основании. Поставлена и решена обратная задача диагностирования скользящих заделок концов балки. Приведен метод решения поставленной обратной задачи при известных значениях двух частот изгибных колебаний балки. Получены двойственные аналитические формулы для определения коэффициентов жесткости пружин растяжения скользящих заделок концов балки. Приведен соответствующий пример.

Ключевые слова: балка на упругом основании, частотное уравнение, обратная задача, диагностирование, скользящие заделки, коэффициенты жесткости.

Return task of flexural to fluctuations of the beam on the elastic basis

Zaripova Elvira Marselevna
Neftekamsk Branch of the Bashkir State University
student

Safina Gulnara Frilovna
Neftekamsk Branch of the Bashkir State University
candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of mathematical modeling and information security

Abstract
Results of a solution of a direct problem of flexural fluctuations of the beam lying on the elastic basis are presented in article. The return task of diagnosing of the sliding seals of the ends of a beam is set and solved. The method of a solution of the set return task at the known values of two frequencies of flexural fluctuations of a beam is given. Dual analytical formulas for definition of stiffness coefficients of extension springs of the sliding seals of the ends of a beam are received. The corresponding example is given.

Keyword: beam on the elastic basis, the frequency equation, the return task, diagnosing, the sliding seals, stiffness coefficients.

Проведенные в работе исследования продолжают тематику виброакустической диагностики механических систем и их составляющих [1-3]. Исследования обратных задач невозможны без рассмотрения прямых спектральных задач, определяющих частоты колебаний механических систем по известным условиям их закреплений. Подобную задачу мы рассмотрим для балки, лежащей на упругом основании, а также поставим и решим обратную к ней спектральную задачу.

Итак, балка длины L прямоугольного сечения площади A и момента инерции J поперечного сечения представлена на рисунке 1. Балка выполнена из материала с модулем Юнга E, плотностью ρ и по всей длине поддерживается упругим основанием с коэффициентом жесткости k.

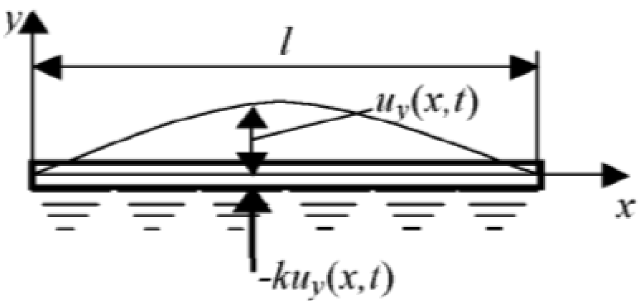

Рисунок 1 – Балка, лежащая на упругом основании

Собственные изгибные колебания такой балки, лежащей на упругом основании, известны и описываются уравнением [1, 3]:

$$\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + ku = 0, \qquad (1)$$

в котором $u = (x,t)$ – прогибы балки; x – осевая координата; t – время; $\rho A = m_0$ – масса единицы длины поперечного сечения балки.

Рассматривая безразмерные переменные: $\xi = \frac{x}{L}$, $\upsilon = \frac{u}{L}$, $\tau = \sqrt{\frac{k}{\rho A}}t$, а также спектральный параметр $\alpha^4 = \frac{kL^4}{EJ}$, уравнение (1) приведем к виду:

$$\frac{\partial^4 \upsilon}{\partial \xi^4} + \alpha^4\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \tau^2} + \upsilon\right) = 0. \qquad (2)$$

Для разделения переменных ξ и τ решение уравнения (2) примем в виде:

$$\upsilon = W(\xi)\sin(\omega\tau + \varphi), \qquad (3)$$

в котором ω – частота колебания балки. Подставляя (3) в уравнение (2) и разделив переменные, получим следующее уравнение

$$W^{(4)}(\xi)+\lambda^4 W(\xi)=0, \qquad (4)$$

в котором $\lambda^4=\alpha^4\left(1-\omega^2\right)$. Рассмотрим краевые условия: балка имеет скользящую заделку с пружиной растяжения слева с жесткостью c_1, справа – жесткостью c_2 (рисунок 2).

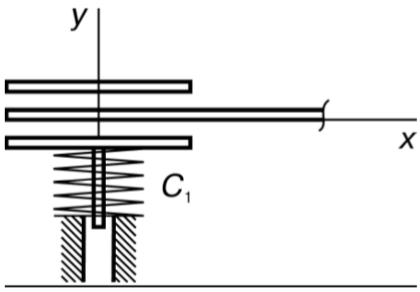

Рисунок 2 – Скользящая заделка с пружиной растяжения

Тогда в безразмерных переменных краевые условия примут вид:

$$\begin{cases} W''(0)=0; \quad W'''(0)-k_1 W(0)=0; \\ W''(1)=0; \quad W'''(1)+k_2 W(1)=0. \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь: $k_1=\dfrac{c_1}{EJ}$; $k_2=\dfrac{c_2}{EJ}$.

Решение уравнения (4) найдем с помощью характеристического определителя в виде:

$$W(\xi)=C_1 ch\lambda\xi+C_2 sh\lambda\xi+C_3\cos\lambda\xi+C_4\sin\lambda\xi\,, \qquad (6)$$

где C_{i} – амплитуды колебаний, λ – спектральный параметр.

Подставим решение (6) в краевые условия (5) и получим систему уравнений относительно ненулевых значений амплитуд колебаний балки. Далее с учетом существования ненулевого решения полученной системы уравнений определим частотное уравнение к прямой задаче (4), (5) в следующем виде:

$$\begin{gathered} \lambda^{10}\cos(\lambda)^2+\lambda^{10}\sin(\lambda)^2-2\lambda^7 sh(\lambda)k_2\cos(\lambda)-2\lambda^7 sh(\lambda)k_1\cos(\lambda)+ \\ +4\lambda^4 sh(\lambda)k_1 k_2\sin(\lambda)+2\lambda^7 ch(\lambda)k_1\sin(\lambda)-2\lambda^{10} ch(\lambda)\cos(\lambda)+ \\ +2\lambda^7 ch(\lambda)k_2\sin(\lambda)+\lambda^{10} ch(\lambda)^2-\lambda^{10} sh(\lambda)^2=0. \end{gathered} \qquad (7)$$

Из уравнения (7) при различных значениях k_1 и k_2 (а значит и значениях c_1 и c_2 жесткостей пружин растяжения скользящих заделок концов балки) можно определять спектральные параметры λ_i $(i=1,2,3,...)$ и соответствующие им частоты ω_i $(i=1,2,3,...)$ колебаний балки.

Поставим и решим теперь обратную задачу: известны частоты изгибных колебаний балки, лежащей на упругом основании, требуется определить соответствующие коэффициенты жесткостей пружин растяжения скользящих заделок концов балки.

Для решения обратной задачи частотное уравнение (7) приведем к виду:

$$\Delta(\lambda) = f_1(\lambda)(k_1 + k_2) + f_2(\lambda)k_1k_2 + f_3(\lambda) = 0, \tag{8}$$

в котором

$$f_1(\lambda) = 2\lambda^7(ch(\lambda)k_1\sin(\lambda) - sh(\lambda)\cos(\lambda)), \quad f_2(\lambda) = 4\lambda^4 sh(\lambda)\sin(\lambda),$$
$$f_3(\lambda) = \lambda^{10}(\cos(\lambda)^2 + \sin(\lambda)^2 - 2ch(\lambda)\cos(\lambda) + ch(\lambda)^2 - sh(\lambda)^2). \tag{9}$$

Рассмотрим метод решения задачи при известных значениях двух частот колебаний балки. Пусть известны первые две собственные частоты ω_i $(i = 1,2)$ колебаний балки, а значит соответствующие им собственные значения λ_i. Подставим значения λ_1 и λ_2 в уравнение (8) и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} f_1(\lambda_1)x + f_2(\lambda_1)y + f_3(\lambda_1) = 0, \\ f_1(\lambda_2)x + f_2(\lambda_2)y + f_3(\lambda_2) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

в котором $x = k_1 + k_2$, $y = k_1k_2$ $(i = 1,2)$.

Если определитель матрицы системы уравнений (10) отличен от нуля, то решая систему по методу определителей, получим:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \tag{11}$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & f_2(\lambda_1) \\ f_1(\lambda_2) & f_2(\lambda_2) \end{vmatrix} = f_1(\lambda_1)f_2(\lambda_2) - f_2(\lambda_1)f_1(\lambda_2);$$
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -f_3(\lambda_1) & f_2(\lambda_1) \\ -f_3(\lambda_2) & f_2(\lambda_2) \end{vmatrix} = -f_3(\lambda_1)f_2(\lambda_2) + f_2(\lambda_1)f_3(\lambda_2); \tag{12}$$
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} f_1(\lambda_1) & -f_3(\lambda_1) \\ f_1(\lambda_2) & -f_3(\lambda_2) \end{vmatrix} = -f_1(\lambda_1)f_3(\lambda_2) + f_3(\lambda_1)f_1(\lambda_2).$$

Найденные значения x и y далее приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = x, \\ k_1k_2 = y; \end{cases} \tag{13}$$

или с учетом (11) и (12), получим следующие равенства:

$$k_1 + k_2 = \frac{f_2(\lambda_1)f_3(\lambda_2) - f_3(\lambda_1)f_2(\lambda_2)}{f_1(\lambda_1)f_2(\lambda_2) - f_2(\lambda_1)f_1(\lambda_2)};$$
$$k_1k_2 = \frac{f_3(\lambda_1)f_1(\lambda_2) - f_1(\lambda_1)f_3(\lambda_2)}{f_1(\lambda_1)f_2(\lambda_2) - f_2(\lambda_1)f_1(\lambda_2)}. \tag{14}$$

Систему (13) разрешим относительно искомых коэффициентов. Тогда по теореме, обратной теореме Виета, искомые коэффициенты k_1 и k_2 можно рассмотреть как корни квадратного уравнения с коэффициентами $a=1$, $b=-(k_1+k_2)=-x$, $c=k_1\cdot k_2=y$, то есть имеем:

$$k^2-xk+y=0.$$

При этом $D=(-x^2)-4\cdot 1\cdot y=x^2-4y$, тогда:

$$k_1=\frac{(x\pm\sqrt{x^2-4y})}{2};$$

$$k_2=\frac{(x\mp\sqrt{x^2-4y})}{2}.$$

Или с учетом равенств (14) получим:

$$\begin{gathered}
k_1=\frac{1}{2}\left(\frac{f_2(\lambda_1)f_3(\lambda_2)-f_3(\lambda_1)f_2(\lambda_2)}{f_1(\lambda_1)f_2(\lambda_2)-f_2(\lambda_1)f_1(\lambda_2)}\pm\right.\\
\left.\pm\sqrt{\left(\frac{f_2(\lambda_1)f_3(\lambda_2)-f_3(\lambda_1)f_2(\lambda_2)}{f_1(\lambda_1)f_2(\lambda_2)-f_2(\lambda_1)f_1(\lambda_2)}\right)^2-4\cdot\frac{f_3(\lambda_1)f_1(\lambda_2)-f_1(\lambda_1)f_3(\lambda_2)}{f_1(\lambda_1)f_2(\lambda_2)-f_2(\lambda_1)f_1(\lambda_2)}}\right);\\
k_2=\frac{1}{2}\left(\frac{f_2(\lambda_1)f_3(\lambda_2)-f_3(\lambda_1)f_2(\lambda_2)}{f_1(\lambda_1)f_2(\lambda_2)-f_2(\lambda_1)f_1(\lambda_2)}\mp\right.\\
\left.\mp\sqrt{\left(\frac{f_2(\lambda_1)f_3(\lambda_2)-f_3(\lambda_1)f_2(\lambda_2)}{f_1(\lambda_1)f_2(\lambda_2)-f_2(\lambda_1)f_1(\lambda_2)}\right)^2-4\cdot\frac{f_3(\lambda_1)f_1(\lambda_2)-f_1(\lambda_1)f_3(\lambda_2)}{f_1(\lambda_1)f_2(\lambda_2)-f_2(\lambda_1)f_1(\lambda_2)}}\right).
\end{gathered}\tag{15}$$

Аналитические формулы (15) показывают двойственность определяемых значений k_1, k_2.

Пример. Найти жесткости пружин растяжения скользящих заделок концов балки, лежащей на упругом основании, если известны собственные значения $\lambda_1=4{,}6247$ и $\lambda_2=7{,}8305$, соответствующие первым частотам ω_1 и ω_2 колебаний, а также физические параметры балки:

$$l=0{,}1\ м,\ E=2{,}2\cdot 10^{11}\ Н\cdot м^{-2},\quad I=5\cdot 10^{-6}\ м^4,\quad k=2\cdot 10^6\ Н\cdot м^{-1}.$$

Решение. Подставим λ_1 и λ_2 в формулу (9) и получим:

$$f_1(\lambda_1)=-0{,}419\cdot 10^7;\qquad f_1(\lambda_2)=0{,}154\cdot 10^{15};$$

$$f_2(\lambda_1)=-92930{,}964;\qquad f_2(\lambda_2)=0{,}109\cdot 10^{12};$$

$$f_3(\lambda_1)=0{,}489\cdot 10^8;\qquad f_3(\lambda_2)=-0{,}169\cdot 10^{16}.$$

Найденные числовые значения $f_i(\lambda_j)$ $(i=1{,}2{,}3;\ j=1{,}2)$ подставим в формулы (15) и получим:

$$(k_1=5{,}999;\ k_2=5{,}000);(k_1=5{,}000;\ k_2=5{,}999).$$

С учетом заданных физических параметров получим тогда пары значений c_1 и c_2 жесткостей пружин растяжения скользящих заделок балки $c_1=6{,}6\cdot 10^6\ Н\cdot м^{-1}$, $c_2=5{,}5\cdot 10^6\ Н\cdot м^{-1}$ или $c_1=5{,}5\cdot 10^6\ Н\cdot м^{-1}$, $c_2=6{,}6\cdot 10^6\ Н\cdot м^{-1}$, определяемые при заданных значениях двух частот колебаний балки, лежащей на упругом основании.

Заметим, что по решению прямой задачи именно этим значениям c_1 и c_2 жесткостей пружин растяжения балки соответствуют заданные собственные значения $\lambda_1 = 4{,}6247$ и $\lambda_2 = 7{,}8305$.

Найденные пары решений относительно искомых параметров подтверждают двойственность полученных аналитических формул (15), а значит и двойственность решения поставленной обратной задачи.

Рассмотренный метод решения обратной задачи применим и для других подобных краевых задач, образующихся при моделировании свободных колебаний как механических систем с конечным числом степеней свободы, так и распределенных механических систем.

Библиографический список

1. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х томах. Т.1 / Под ред. А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1983.
2. Бутенин. Теория колебаний. СПб.: Издательство «Судостроение», 1963. 186 с.
3. Доев В.С. Поперечные колебания балок - учебное пособие М КНОРУС, 2016. 412 с.