

Расчет прогиба плоской рамы с произвольным числом панелей в системе Maple методом индукции

Белянкин Никита Андреевич

НИУ «МЭИ»

Студент

Бойко Андрей Юрьевич

НИУ «МЭИ»

Студент

Плясова Анна Алексеевна

РХТУ им. Д.И.Менделеева

Студент

Аннотация

Рама с крестообразной решеткой имеет две неподвижные шарнирные опоры. К раме приложена вертикальная сила в середине пролета. Выводится зависимость прогиба рамы от числа панелей в ригеле и боковых сторонах рамы. Применяются операторы системы символьной математики Maple. Усилия в стержнях находятся методом вырезания узлов. Деформация определяется по формуле Максвелла - Мора. Индукция по числу панелей в ригеле на основе ряда частных решений дает искомую формулу.

Ключевые слова: рама, ферма, интеграл Максвелла-Мора, прогиб, индукция, Maple

Calculation of a flat frame deflection with an arbitrary number of panels in the Maple system by induction

Belyankin Nikita Andreevich

NRU «MPEI»

Student

Boyko Andrey Yurievich

NRU «MPEI»

Student

Plyasova Anna Alexeevna

MUCTR

Student

Abstract

The frame with a cruciform grille has two fixed pivot bearings. A vertical force is applied to the frame in the middle of the span. The dependence of the frame deflection on the number of panels in the girder and the sides of the frame is displayed. The operators of the system of symbolic mathematics Maple are used. The forces in the rods are found by cutting the knots. Deformation is determined by the formula of Maxwell - Mohr. Induction on the number of panels in the crossbar on the basis of a number of particular solutions gives the desired formula.

Keywords: frame, truss, Maxwell -Mohr's integral, deflection, induction, Maple

Ферма высотой $mh+2b$ (рис 1) с пролетом, состоящим из $2n$ панелей длиной a , нагружена по нижнему поясу ригеля. Две неподвижные шарнирные опоры делают раму внешне статически неопределимой. В симметричной раме выделены три части: ригель с $2n$ панелями, наклонные части с k панелями и вертикальные с m панелями. Все панели имеют крестообразную решетку (конструкция Кирсанова М.Н.). Реакции опор в таких системах, составляя традиционные уравнения равновесия рамы в целом, нельзя найти. Более того, крестообразная решетка не позволяет применять метод сечений для определения усилий в стержнях. Расчет усилий и одновременно реакций опор произведем методом вырезания всех узлов рамы. Для этого применим программу [1], которая ранее использовалась в некоторых аналитических расчетах шпренгельных [2-5], арочных [6-13] и пространственных [14-18] ферм. Для расчета многорешетчатых ферм [19-26] эта программа наиболее эффективна.

В рассматриваемой ферме с n панелями в половине пролета число стержней $-N_s = 8(n + m + k) + 4$, включая четыре стержня, моделирующие неподвижные шарнирные опоры. Опорные стержни предполагаются жесткими и в расчет прогиба не входят.

Стержни и шарниры нумеруются (рис. 2).

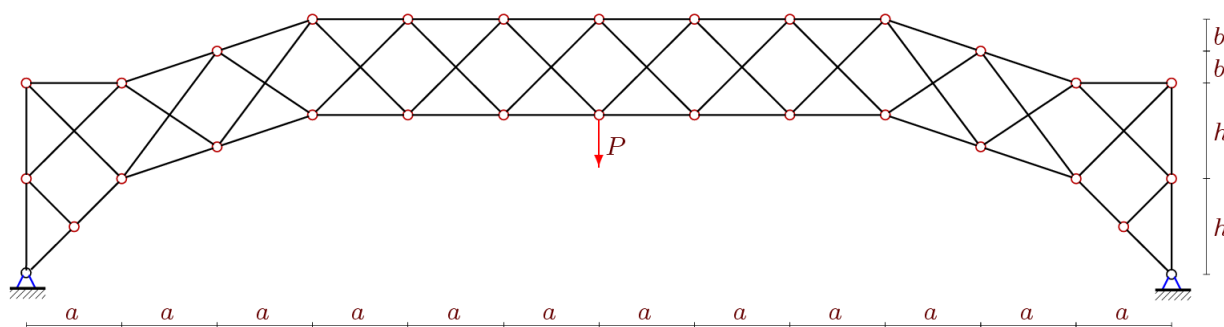
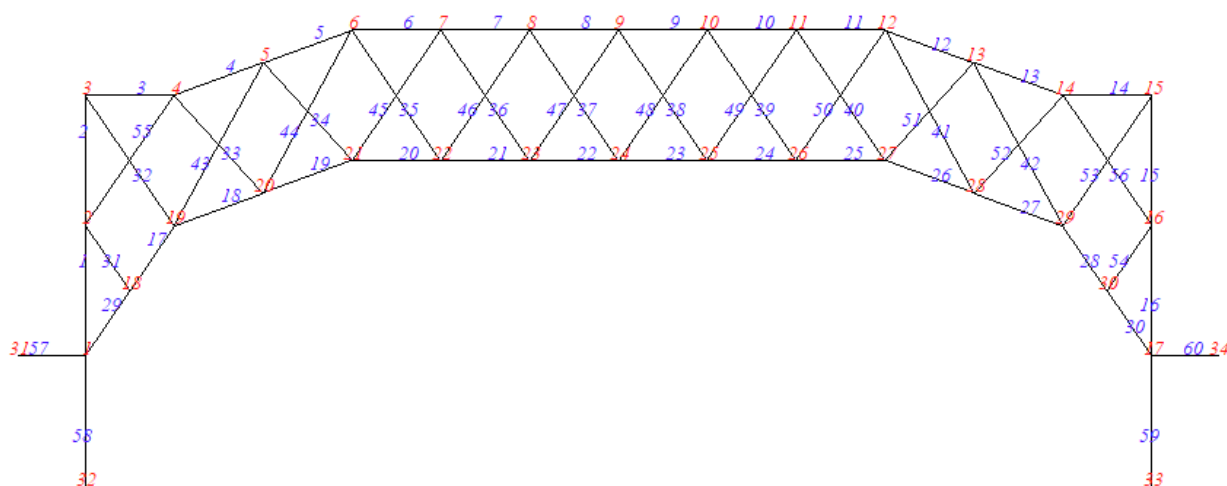


Рисунок 1— Ферма при $n=3$, $k=2$, $m=2$

Рисунок 2— Нумерация узлов и стержней при $n=3, k=2, m=2$

Фрагмент программы ввода координат узлов при $n=m=2$ на языке системы символьной математики Maple имеет вид

```
> for i to m+1 do
>   x[i]:=0; y[i]:=i*h-h;
>   x[i+m+2+2*k+2*n]:=2*k*a+2*n*a+2*a;
>   y[i+m+2+2*k+2*n]:=m*h-h*i+h;
> end:
> for i to k do
>   x[i+m+1]:=i*a; y[i+m+1]:=m*h+b*(i-1);
>   x[i+m+2+k+2*n]:=k*a+2*n*a+i*a+a;
>   y[i+m+2+k+2*n]:=m*h+b*k-b*i;
>   x[i+r+m+3]:=a+i*a; y[i+r+m+3]:=i*b+m*h-h;
>   x[i+r+m+3+k+2*n-1]:=k*a+2*n*a+a*i;
>   y[i+r+m+3+k+2*n-1]:=k*b+m*h-b*i-h+b;
> end:
> for i to 2*n+1 do
>   x[i+m+1+k]:=k*a+i*a; y[i+m+1+k]:=m*h+b*k;
> end:
```

Структура соединений узлов и стержней (рис. 2) вводится специальными векторами, содержащими номера концов соответствующего стержня.

Для узлов фермы составляются уравнения равновесия в проекциях на оси координат [1-9].

Решение системы линейных уравнений в символьной форме (задействованы операторы системы символьной математики Maple [1]) дает выражения для усилий во всех стержнях. Для вычисления прогиба используется интеграл Мора в виде:

$$\Delta = P \sum_{i=1}^{N_s-4} S_i^2 l_i / (EF),$$

Обозначено: S_i — усилия в стержнях фермы от действия единичной нагрузки, l_i — длины стержней, EF — жесткость стержней.

Индукция по 14 фермам дает формулу для прогиба вида:

$$\Delta = P(a^3 A_n + c^3 C_n + g^3 G_n + f^3 F_n + p^3 P_n + h^3 H_n) / (9216h^2). \quad (1)$$

При обнаружении общего члена последовательности коэффициентов при a^3 в случае, когда $m=k=2$ потребовалось проанализировать 14 выражения прогиба и получить следующие натуральные числа: 1354752, 419328, 4552704, 576000, 8782848, 658944, 14192640, 815616, 20929536, 1193472, 29140992, 1939968, 38974464, 3202560. Найти общий член этой последовательности обычными методами затруднительно. Оператором *rgf_findrecur* пакета *genfunc* системы Maple для членов последовательности можно получить линейное однородное рекуррентное уравнение седьмого порядка:

$$A_n = A_{n-1} + 3A_{n-2} - 3A_{n-3} - 3A_{n-4} + 3A_{n-5} + A_{n-6} - A_{n-7}.$$

Оператор *rsolve* находит решение уравнения, задающее искомую формулу для коэффициента при a^3

$$A_n = 512(6n^3 + (54 - 96(-1)^n)n^2 + (1389 - 864(-1)^n)n - 54(-1)^n + 135).$$

Аналогично, при анализе численного ряда 873, 81, 873, 81 и т.д., находим, что коэффициент C_k удовлетворяет однородному уравнению второго порядка $C_n = C_{n-2}$ и имеет вид

$$C_n = 9(53 - 44(-1)^n).$$

Для коэффициента G получен числовой ряд 26226, 8514, 26226, 8514, 26226, 8514, 26226, 8514, 26226, 8514, 26226, 8514, выведено однородное уравнение второго порядка вида: $G_n = G_{n-2}$

Решение данного уравнения имеет вид: $G_n = 18(965 - 492(-1)^n)$

Числовая последовательность при коэффициенте F_n совпала с последовательностью для коэффициента C , а значит однородное уравнение имеет решение: $F_n = 9(53 - 44(-1)^n)$

Для коэффициента P получена следующая последовательность: 193536, 124416, 202752, 133632, 211968, 142848, 221184, 152064, 230400, 161280, 239616, 170496, 248832, 179712. Из данного числового ряда выведено рекуррентное однородное уравнение третьего порядка $P_n = P_{n-1} + P_{n-2} - P_{n-3}$, решение которого имеет вид: $P_n = 4608(n - 8(-1)^n + 33)$.

В свою очередь, для коэффициента H_n из числового ряда: 230400, 82944, 230400, 82944, 230400, 82944, 230400, 82944, 230400, 82944, 230400, 82944, получено следующее однородное уравнение второго порядка: $H_n = H_{n-2}$, а его решение имеет вид:

$$H_n = 9216(17 + 8(-1)^{n+1}).$$

Кривые на рисунке 4 построены по формуле (1) для безразмерного относительного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (LP_s)$ при длине пролета $L=100$ м. Длина панели a зависит от пролета: $a=L/(2n)$. Высота h указана в метрах.

В случае, когда $m=k=3$ (рис. 3) приведем для каждого из коэффициентов числовые ряды:

- Для A_n : 27240448, 34237440, 147750912, 138359808, 401168384, 367082496, 837332992, 770245632, 1506084864, 1397689344, 2457264128, 2299253760, 3740710912, 3524779008;
- Для C_n : 16147, 65907, 16147, 65907 и т.д.;
- Для G_n : 240278, 207990, 240278, 207990 и т.д.;
- Для F_n : 12611, 37827, 12611, 37827 и т.д.;
- Для P_n : 3237888, 11971584, 6352896, 15086592, 9467904, 18201600;
- Для H_n : 2829312, 10202112, 2829312, 10202112 и т.д.

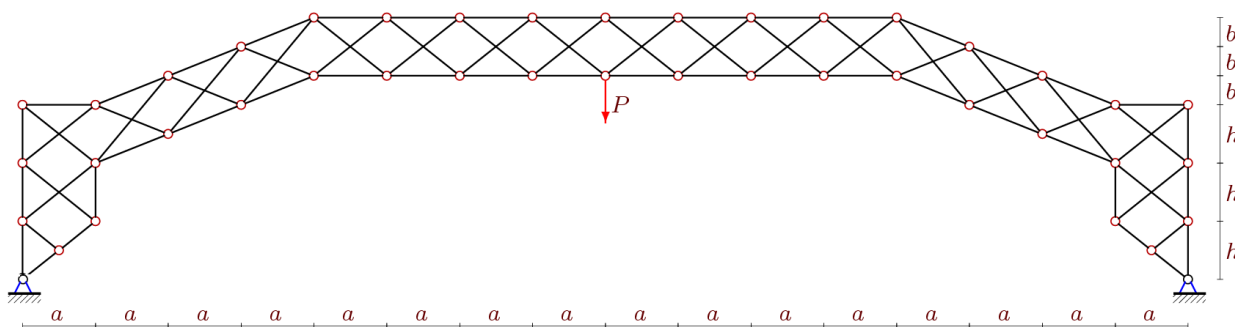


Рисунок 3— Ферма при $n=4, k=3, m=3$

Из данных последовательностей выведены рекуррентные уравнения и их решения:

- Для A_n : $A_n = A_{n-1} + 3A_{n-2} - 3A_{n-3} - 3A_{n-4} + 3A_{n-5} + A_{n-6} - A_{n-7}$
 $A_n = 1024(1014n^3 + 6(845 - 338(-1)^n)n^2 + (10733 - 6536(-1)^n)n + 1770(-1)^n + 2991).$

- Для C_n : $C_n = C_{n-2}$

$$C_n = 41027 + 24880(-1)^n$$

- Для G_n : $G_n = G_{n-2}$

$$G_n = 2(112067 - 8072(-1)^n)$$

- Для F_n : $F_n = F_{n-2}$

$$F_n = 25219 + 12608(-1)^n$$

- Для P_n : $P_n = P_{n-1} + P_{n-2} - P_{n-3}$

$$P_n = 3072(507n + 1168(-1)^n + 1715).$$

- Для H_n : $H_n = H_{n-2}$

$$H_n = 9216(707 + 400(-1)^n)$$

Заметим, что индукция по 14 фермам дает формулу для прогиба вида:

$$\Delta = P(a^3 A_n + c^3 C_n + g^3 G_n + f^3 F_n + p^3 P_n + h^3 H_n) / (3115008h^2). \quad (2)$$

Метод индукции и программа [1] расчета усилий на языке Maple использовалась при расчете системы с вантовыми креплениями [27], плоской статически определимой рамы [28,29], при моделировании шпангоута корабля фермой [30], конструкции башенного типа [31], и фермы с приподнятым поясом (вспарушенной) [32]. Задача о колебании груза на ферме методом индукции решена в [33].

Обзор работ, использующих систему Maple, метод индукции и программу [1] при выводе формул для прогиба плоских ферм, выполнен в [9, 35,36].

Библиографический список

1. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в шпренгельной ферме с произвольным числом панелей // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. 14(2). С. 90-95.
3. Гавриленко А.Б., Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка жесткости шпренгельной фермы// Строительство и реконструкция. 2018. 2(76). С. 11-17.
4. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. №5. С.11-13
5. Широков А.С. Аналитический расчет смещения опоры балочной фермы с верхними шпренгелями // Строительная механика и конструкции. 2017. №2(15). С. 11-14.
6. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей// Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. 4 (67). С. 86-94. doi: 10.18720/CUBS.67.7
7. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. №1. С.7-11.
8. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2018. 14(1). Рр.64-70. doi:10.22337/2587-9618-2018-14-1-64-70
9. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа// Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
10. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50–55
11. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. №9. С. 8-10.
12. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12.
13. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических

- стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. №9. С. 8-10.
14. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. Вып. 5 (116). С. 579–586. doi: www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586
15. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // Magazine of Civil Engineering. 2017. №. 8(76). С. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
16. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 2 (101). С. 165–171.
17. Kirsanov M. N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4(64). С. 52 - 58. DOI: 10.5862/MCE.64.5
18. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. 5(268). С.19-22.
19. Kirsanov M. N. Inductive analysis of the deformation of a planar multi-layer truss // Строительная механика и конструкции. 2018. №3(18). С. 28-32.
20. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с двойными раскосами // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 105–111. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-105-111
21. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. №4(279). С.10-14.
22. Kirsanov M.N. Installation diagram of the lattice truss with an arbitrary number of panel // Magazine of Civil Engineering. 2018. 81(5). Pp. 175–183. doi: 10.18720/MCE.81.17.
23. Kirsanov M. N. Inductive analysis of the deformation of a planar multi-layer truss // Строительная механика и конструкции. 2018. №3(18). С. 28-32.
24. Белянкин Н.А., Бойко А. Ю., Плясова А.А. Индуктивный анализ деформативности многорешетчатой фермы при несимметричном нагружении // Строительная механика и конструкции. 2018. №3(18). С. 33-41.
25. Доманов Е.В. Вывод формулы для прогиба балочной фермы с крестообразной решеткой // Строительная механика и конструкции. 2017. №2 (15). С. 15-19.
26. Кирсанов М.Н. Точное решение задачи о прогибе решетчатой фермы с произвольным числом панелей // Научный журнал строительства и архитектуры. 2017. №4(48). С. 83-89.
27. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет деформаций и усилий в плоской вантовой ферме // Механизация строительства. 2018. № 1. С. 29-33
28. Kirsanov M. N. Formula for the deflection of the planar hinged-pivot frame // Строительная механика и конструкции. 2018. № 2 (17). С. 67-71.

29. Широков А.С. Вывод формулы для прогиба статически определимой portalной фермы в зависимости от числа панелей // Молодежь и наука. 2018. №5. С.119.
30. Кирсанов М. Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте моделируемого фермой // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560–569. doi: 10.21821/2309-5180-2017-9-3-560-569
31. Тиньков Д.В. Индуктивный вывод формулы для горизонтального перемещения башенной конструкции// Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» -GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 249-254.
32. Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12, № 8 (107). С. 869–875.
33. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитическое решение задачи о частоте колебания груза в произвольном узле балочной фермы в системе Maple//Строительство: наука и образование. 2018. № 4 (30). С. 3.
34. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба впарушенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 2. № 13 (13). С. 10-14.
35. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. №12. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/958/984>
36. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73. doi: 10.5862/MCE.57.6