

**Вывод зависимости прогиба балочной фермы с боковыми распорками от числа панелей***Воропай Руслан Александрович**НИУ «МЭИ»**Студент***Аннотация**

Плоская внешне статически неопределимая балочная ферма загружается в середине пролета. Выводится формула зависимости прогиба от размеров фермы, нагрузки и числа панелей. Для решения задачи применяется метод вырезания узлов, метод индукции и операторы системы Maple, позволяющие составлять и решать рекуррентные уравнения при выводе общих членов последовательностей коэффициентов искомой формулы. Перемещение узла в верхнем поясе находится по формуле Максвелла – Мора. Предполагается, что все стержни фермы имеют одинаковую жесткость, а опоры недеформируемые.

**Ключевые слова:** ферма, формула Максвелла - Мора, прогиб, индукция, Maple

**The derivation of the dependence of the deflection of a beam truss with lateral struts on the number of panels***Voropay Ruslan Alexandrovich**NRU «MPEI»**Student***Abstract**

A planar, statically indeterminate beam truss is loaded in the middle of the span. A formula is derived for the dependence of deflection on the size of the truss, the value of load and the number of panels. To solve the problem, we use the method of cutting nodes, the method of induction, and the operators of the Maple system, which allow us to compose and solve recurrent equations in deriving common terms of the sequence of coefficients of the desired formula. The displacement of the node in the upper belt is obtained according to the Maxwell-Mohr's formula. It is assumed that all the rods of the truss have the same rigidity, and the supports are not deformed.

**Keywords:** truss, Maxwell – Mohr's formula, deflection, induction, Maple

Analytic calculations of trusses with an arbitrary number of panels appeared together with the development of computer mathematics and induction methods, proposed by Professor NRU «MPEI» Kirsanov M. For arched trusses solutions were obtained in [1-11], lattice — in [12-22], spatial ones — [23-30].

Consider a planar symmetrical truss with four supports (Figure 1), one of which is fixed, the other three – supporting rods (movable supports). The truss is statically determinate. In a truss with  $n$  panels in the lower belt, the number of rods is  $n_3 = 4n + 18$  including five support rods. For a truss with the same lattice, but with other supports, analytical expressions for the dependence of the deflection on the number of panels were obtained in [31, 32].

Consider the case of an odd number of panels  $n = 2k - 1$ . In this case, you can select the central node in the upper belt.

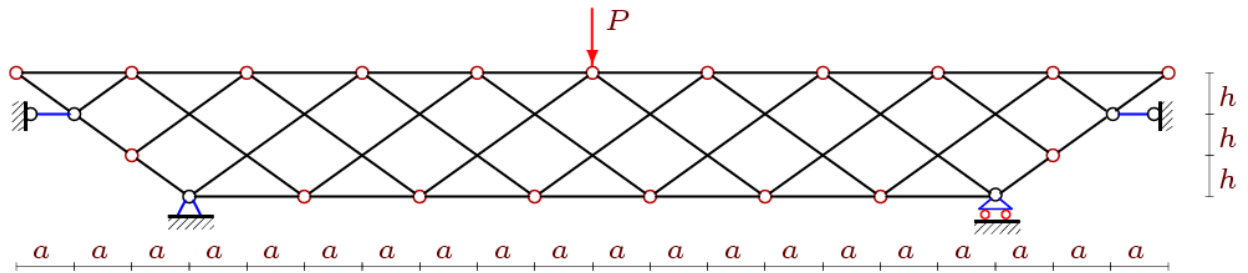


Figure 1 - The truss loaded in the middle of the span,  $n = 7$

Calculation of the deflection begins with the determination of the forces in the rods. Using the program [33], we compose a system of equilibrium equations for all nodes of the whole truss, excluding the five that are attached to the base. The coefficients of the system of equations for the equilibrium of nodes (direction cosines of forces) are determined from the coordinates of the nodes and the structure. To do this, the lengths of the rods and their projections on the coordinate axis are first calculated.

```
> for i to m do
>   Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:
>   Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:
>   L[i]:=sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2);
> od:
```

The conditional directions of the rods are introduced in order to distinguish the origin of the rod from its end. This is because the force vector of the rod, attached to the hinge at one end, is opposite to the same force at the other end:

```
> for i to m do
>   for j to 2 do
>     r:=2*N[i][2]-2+j:
>     if r<=m then G[r,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi;
>     r:=2*N[i][1]-2+j:
>     if r<=m then G[r,i]:= Lxy[j]/L[i]:fi;
>   od;
> od:
```

The deflection is calculated using the Maxwell-Mohr's formula:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-5} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Here:  $S_i^{(P)}$  — the forces in the rods from a given uniform load,  $l_i$  — the length of the rods,  $S_i^{(1)}$  — the forces from a single vertical force applied to the middle of the lower belt (at the knot where the deflection is determined),  $EF$  — stiffness of the rods.

The first calculations showed that not all trusses have a solution. For  $k = 1, 4, 7, \dots$  the determinant of the system of equations becomes zero. This indicates a kinematic structural variability [34-36]. We introduce a function that takes on the set of natural numbers all the values except the numbers  $3u - 2, u=1,2,\dots$

$$k = (1 + 6u - (-1)^u) / 4, \quad u = 1, 2, 3, \dots$$

Induction over twelve trusses for the load from above (Figure 1) showed that the deflection formula has the same form

$$\Delta = P(a^3 A_u + c^3 C_u) / (EFh^2), \quad c = \sqrt{a^2 + h^2}. \quad (1)$$

When a common term of the sequence of coefficients was found for  $a^3$ , it was required to analyze 12 expressions for the deflection and obtain the following natural numbers: 3, 29, 57, 155, 255, 473, 693, 1079, 1467, 2069, 2673, 3539. Identify the general term of this sequence directly difficult. Using the `rgf_findrecur` operator of the Maple `genfunc` package for the members of this sequence, the following linear homogeneous recursion equation of the sixth order

$$A_u = 2A_{u-1} + A_{u-2} - 4A_{u-3} + A_{u-4} + 2A_{u-5} - A_{u-6}.$$

The following simpler equation is obtained for the coefficients of  $c^3$

$$C_u = C_{u-1} + C_{u-2} - C_{u-3}$$

Solving the recurrence equations with the help of the `rsolve` operator, for the coefficients we obtain the following regularities:

$$A_u = (4u^3 + 8u + 6(-1)^u u + (-1)^{u+1} - 1) / 2, \quad C_u = 3(2u + (-1)^u + 1) / 2.$$

A reviews of papers using the induction method and Maple operators in planar trusses problems are contained in [37-39].

## References

1. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2018. 14(1). Pp.64-70. DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-64-70
2. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. №1. С.7-11.

3. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50-55.
4. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. №9. С. 8-10.
5. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. 9(36). С. 44-55.
6. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
7. Кирсанов М.Н., Степанов А.С.О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей//Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5. С. 9-14.
8. Kazmiruk I.Yu. On the arch truss deformation under the action of lateral load //Science Almanac. 2016. No. 3-3(17). Pp. 75-78.
9. Belyankin N.A., Boyko A. Y., Kirsanov M.N. The derivation of the formula for arch deflection by the method of double induction in the Maple system // Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» -GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 120-123.
- 10.Kirsanov M.N., Lafickova M. G., Nikitina A. S. An inductive derivation of the dependence of the arched truss deflection on the number of panels//Science Almanac. 2017. N 4-3(30).C. 205-208.
- 11.Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels // Science Almanac. 2017. N 2-3(28). С. 268-271.
- 12.Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. Pp. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7.
- 13.Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. №7. С.15-17.
- 14.Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. С. 14-17.
- 15.Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58–65. doi: 10.5862/MCE.57.5
- 16.Кирсанов М.Н. Индуктивный вывод формул для деформаций плоской решетчатой фермы // Строительство и реконструкция. 2017. N2(70). С. 17–22.
- 17.Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. 4 (874). С. 20-23.
- 18.Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей // Механизация строительства. 2017. № 3 (873). С. 26-29

19. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Analytical calculation and analysis of planar springel truss // Строительная механика и конструкции. 2018. № 2 (17). С. 72-79.
20. Domanov E.V. The dependence of the deflection of the cantilever truss on the number of panels obtained in the system Maple // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.2. №17. С. 80-86.
21. Kirsanov M. N. Formula for the deflection of the planar hinged-pivot frame // Строительная механика и конструкции. 2018. № 2 (17). С. 67-71.
22. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
23. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. Вып. 5 (116). С. 579–586. DOI: [www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586](http://www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586)
24. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure. Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 8. Pp. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
25. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. 5(268). С.19-22.
26. Kirsanov M. N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52 - 58. DOI: 10.5862/MCE.64.5
27. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный журнал строительства и архитектуры. 2016. №1(41). С. 93-100.
28. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2. С. 2-6.
29. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. №1(53). С. 32–38. doi: 10.5862/MCE.53.4
30. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43. doi: 10.5862/MCE.49.4
31. Voropay R.A. Derivation of the formula for the deflection of the truss with additional horizontal struts // Postulat. 2018. No. 6. С.105.
32. Domanov E.V. The formula for the dependence of the deflection of an externally statically indeterminate truss on the number of panels // Postulat. 2018. No. 6. С. 67.
33. Кирсанов М.Н. Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11. М.: Физматлит, 2010. 264 с.
34. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. № 1 (14). С. 27–30.
35. Кирсанов М.Н. Формула для прогиба и анализ кинематической

- изменяемости решетчатой фермы // Строительная механика и конструкции. 2017. №2(15). С. 5-10.
36. Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 8 (107). С. 869-875
37. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
38. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа// Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
39. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12. С. 28. <https://elibrary.ru/item.asp?id=32381924>