УДК 519.852

Основы анализа канонической задачи оптимального использования ресурсов

Осипов Геннадий Сергеевич
Сахалинский государственный университет
д.т.н., заведующий кафедрой Информатики

Аннотация
Изложены методологические основы решения и практического послеоптимизационного анализа задачи оптимального использования ресурсов в классической линейной постановке. Проведен качественный и количественный анализ решения с точки зрения возможных вариаций количества ресурсов, учета их двойственных оценок (теневых цен) и допустимых диапазонов варьирования цен реализации единицы продукции для выполнения условия устойчивости полученного решения. Приведено подробное графическое решение и анализ на чувствительность двухпродуктовой модели. Изложены основы решения задач оптимизации в среде пакета символьной математики *Wolfram Mathematica*.
Ключевые слова: оптимизационные задачи, линейное программирование, использование ресурсов

Fundamentals of the analysis of the canonical problem of optimal use of resources

Osipov Gennadij Sergeevich
Sakhalin State University
Doctor of technical Sciences, Head of the Department of Computer Science

Abstract
The methodological foundations of the solution and the practical post-optimization analysis of the problem of optimal use of resources in the classical linear formulation are outlined. A qualitative and quantitative analysis of the solution was made from the point of view of possible variations in the number of resources, taking into account their ambiguous estimates (shadow prices) and admissible ranges of prices for the sale of a unit of output in order to meet the stability condition of the solution obtained. A detailed graphical solution and analysis on the sensitivity of the two-product model are given. The foundations of solving optimization problems in the environment of the package of symbolic mathematics Wolfram Mathematica are outlined
Keywords: optimization tasks, linear programming, resource utilization

Введение

Глобальные стратегические модели в своей основополагающей концепции как правило являются линейными. Объясняется это тем, что в фундаментальном смысле первостепенным является именно направление синергетического развития системы. И только на втором этапе после определения градиента, переходят к оперативному планированию, уточняющему траекторию движения системы в фазовом пространстве эволюции.

Поэтому в настоящее время возрождается монолит исследований решения именно линейных оптимизационных задач. Причем в арсенал используемых средств включаются среды математического и имитационного моделирования, системы символьной математики и пакеты прикладных программ. Отсюда естественно возникает проблема сравнения инструментальных средств исследований.

Например, Р.И.Баженов, П.А. Васильева и Козич В.Г. в своей статье [1] проводят сравнительный анализ решений экстремальной задачи линейного программирования в средах *MS Excel* и *Scilab*. Вопросы адаптации проблем управления системами их устойчивости и стабилизация к современным методам и средствам решения оптимизационных задач рассматриваются, в частности, в работах [2, 3].

1 Постановка задачи

Под задачей оптимального использования ресурсов/сырья (основной задачей планирования производства) в линейной постановке понимается следующая экстремальная задача:

$$\begin{aligned} &(D, f): f(x) = cx \to \max \\ &D = \left\{ x \in \mathbf{R}^n : Ax \le b;\ x \ge \mathbf{0} \right\}, \end{aligned} \qquad (1)$$

где D – область допустимых планов;

f – целевая функция задачи;

x – вектор-столбец неизвестных;

c – строка коэффициентов при неизвестных в целевой функции;

A – производственная матрица;

b – столбец свободных членов.

Очевидно, двойственной к (1) будет являться следующая экстремальная задача:

$$\begin{aligned} &(D^*, f^*): f^*(u) = ub \to \min \\ &D^* = \left\{ uA \ge c,\ u \ge 0 \right\} \end{aligned}, \qquad (2)$$

где u – строка двойственных оценок (теневых цен) ресурсов.

Требуется осуществить послеоптимизационный анализ решения сформулированной экстремальной задачи.

Для того, чтобы результаты решения и его экономико-математический анализ можно было интерпретировать графически исследуется двухпродуктовая задача (с двумя неизвестными).

2 Двухпродуктовая задача

Проведем исследование следующей задачи оптимального использования ресурсов.

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 предприятие использует четыре вида ресурсов (сырья) S_1, S_2, S_3 и S_4. Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, запасы ресурсов и цена реализации единицы продукции приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Исходные данные задачи

Вид ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции		Запас ресурса
	P_1	P_2	
S_1	1	3	18
S_2	2	1	6
S_3		1	5
S_4	3		21
Цена единицы продукции	2	3	

Необходимо составить такой план производства продукции, чтобы доход от ее реализации был максимальным.

На основании (1) Составим математическую модель решаемой задачи:

$$(D, f): f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$D = \left\{ x \in \mathbf{R}^2 : \begin{cases} x_1 & +3x_2 & \leq & 18 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq & 16 \\ & x_2 & \leq & 5 \\ 3x_1 & & \leq & 21 \end{cases} ; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3 Графический метод решения

На рисунке 1 представлен результат графического решения задачи.

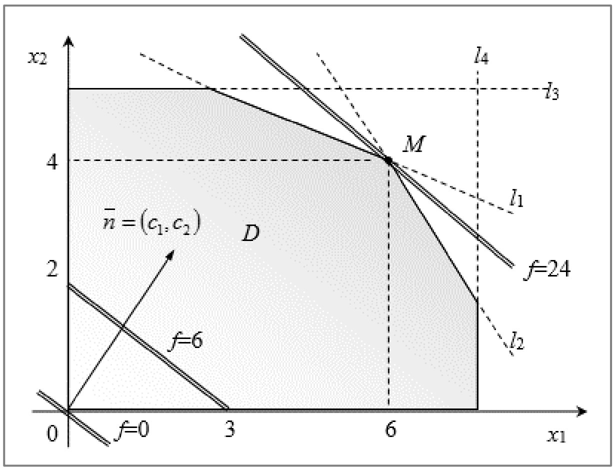

Рис. 1 Область допустимых планов и решение задачи

Комментарии по введенным обозначениям на рисунке представлены ниже:

$$l_1: \frac{x_1}{18} + \frac{x_2}{6} = 1\left(k_1 = -\frac{1}{3}\right)$$

$$l_2: \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{16} = 1\left(k_2 = -2\right);$$

$$l_3: x_2 = 5; l_4: x_1 = 7$$

$$f: 2x_1 + 3x_2 = C; \left(\nabla f = (2;\ 3)\right);]C = 6 \Rightarrow \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} = 1;$$

$$l_1 \cap l_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \end{cases} \Rightarrow M(6;\ 4) \Rightarrow f(6,4) = 2\cdot 6 + 3\cdot 4 = 24.$$

4 Анализ решения

4.1 Анализ результатов

Компоненты оптимального плана:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}; f\left(\bar{x}\right) = 24.$$

Аналитические данные полученного решения представлены в таблице 2.

Таблица 2. Анализ результатов

Ограничение	Статус	Разница
$\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 = 18$	активное (связанное)	0
$2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 16$	активное	0
$\bar{x}_2 = 4 < 5$	пассивное (не связанное)	1
$3\bar{x}_1 = 18 < 21$	пассивное	3

4.2 Анализ дефицитных ресурсов

Ресурс S_1.

На рисунке 2 представлены результаты анализа первого вида ресурсов.

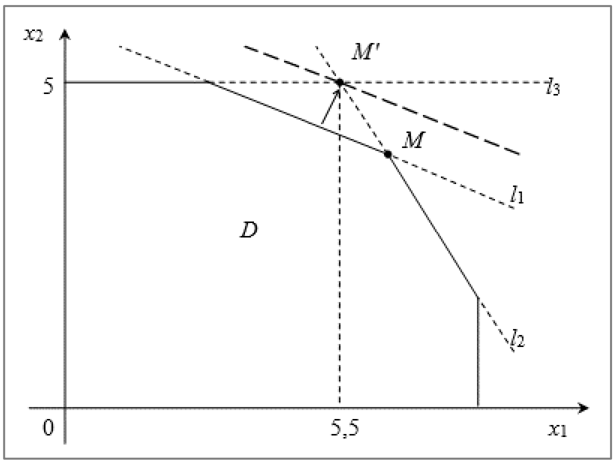

Рис. 2 Допустимое изменение величины первого ресурса

Очевидно:

$$l_2 \cap l_3 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 16 \\ x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow M'(5{,}5;\ 5).$$

Основные сведения о первом дефицитном ресурсе представлены в таблице 3.

Таблица 3. Анализ первого ресурса

Целевая функция:	$f = 2x_1 + 3x_2 = 11 + 15 = 26$	$\Delta f = 2$	Теневая цена
Ресурс:	$x_1 + 3x_2 = 5{,}5 + 15 = 20{,}5$	$\Delta S_1 = 2{,}5$	4/5

<u>Ресурс S_2.</u>

На рисунке 3 представлены результаты анализа второго вида ресурсов.

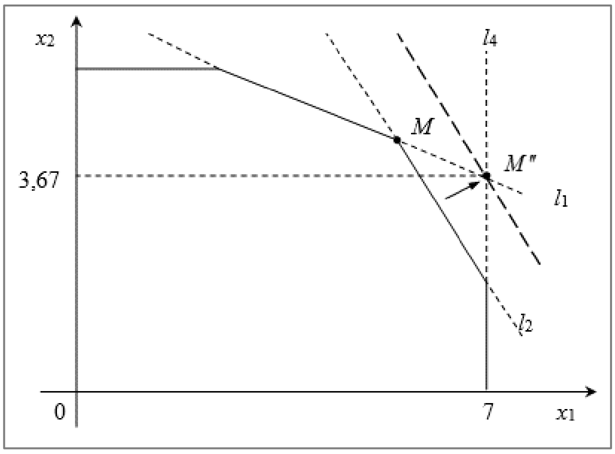

Рис. 3 Допустимое изменение величины второго ресурса.

Очевидно:

$$l_1 \cap l_4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ x_1 = 7 \end{cases} \Rightarrow M''(7;\ 3{,}667).$$

Основные сведения о втором дефицитном ресурсе представлены в таблице 4.

Таблица 4 Анализ второго ресурса

Целевая функция:	$f = 2x_1 + 3x_2 = 14 + 11 = 25$	$\Delta f = 1$	Теневая цена
Ресурс:	$2x_1 + x_2 = 14 + 3{,}667 = 17{,}667$	$\Delta S_2 = 1{,}667$	3/5

4.3 Анализ недефицитных ресурсов

На рисунке 4 представлены результаты анализа недефицитных ресурсов.

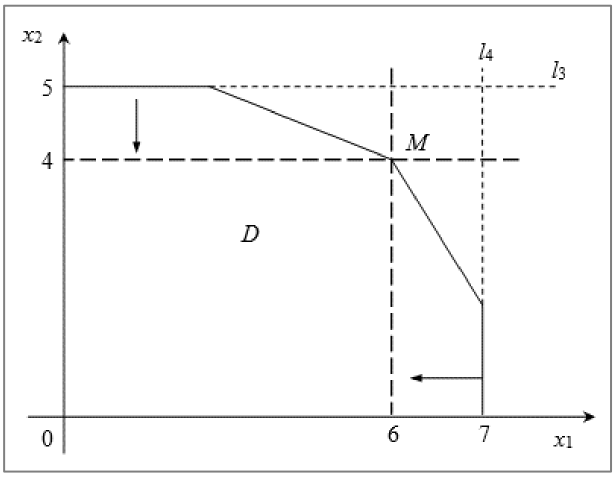

Рис. 4. Допустимое уменьшение количества недефицитных ресурса

Очевидно, объем (запас) ресурса S_3 можно уменьшить на 1 единицу (5-1=4), а объем ресурса S_4 можно уменьшить на 3 единицу (21-3=18). При этом оптимальный план (решение) не изменится.

В таблице 5 приведены совокупные данные о величинах допустимых изменений количества ресурсов при которых решение задачи (набор базисных переменных) останется неизменным.

Табл. 5 Сводная таблица

Устойчивость по ресурсам	Решение	Ограничение	Теневая цена	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
S_1	18	18	0,8	2,5	5
S_2	16	16	0,6	1,667	5
S_3	4	5	0	∞	1
S_4	18	21	0	∞	3

4.4 Анализ влияния цен

Влияние изменения цен продукции иллюстрируется на рисунке 5.

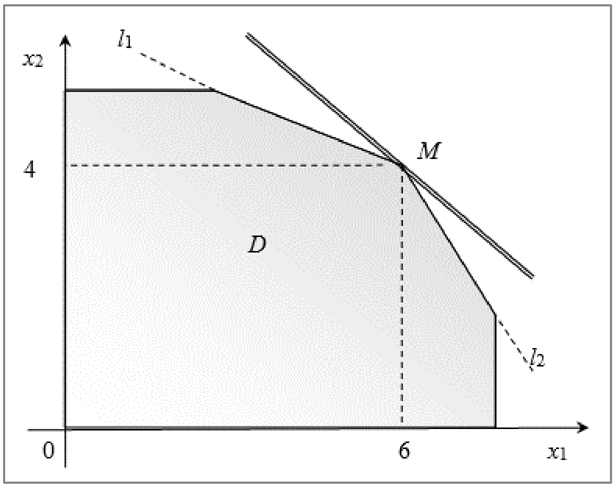

Рис. 5 Влияние цен на решение

Очевидно: $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 = 2x_1 + 3x_2$. Исследуем влияние цены реализации раздельно для каждого из видов продукции.

1) $c_2 = 3 = fix \Rightarrow c_1x_1 + 3x_2 = C$

$-\frac{c_1}{3} = -\frac{1}{3}$	$c_1^{\min} = 1$	$f_{\min} = 6 + 12 = 18$
$-\frac{c_1}{3} = -2$	$c_1^{\max} = 6$	$f_{\max} = 36 + 12 = 48$

Таким образом, если зафиксировать цену единицы продукции P_2 (c_2=3), точка оптимума останется неизменной при варьировании отпускной цены продукцию P_1 от 1 до 6. При этом доход изменяется от 18 до 48.

2) $c_1 = 2 = fix \Rightarrow 2x_1 + c_2x_2 = C$

$-\frac{2}{c_2} = -\frac{1}{3}$	$c_2^{\max} = 6$	$f_{\max} = 12 + 24 = 36$
$-\frac{2}{c_2} = -2$	$c_2^{\min} = 1$	$f_{\min} = 12 + 4 = 16$

Таким образом, если зафиксировать цену единицы продукции P_1 (c_1=2), точка оптимума останется неизменной при варьировании отпускной цены продукцию P_2 от 1 до 6. При этом доход изменяется от 16 до 36.

Устойчивость по ценам	Значение	Целевой коэффициент	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
x_1	6	2	4	1
x_2	4	3	3	2

5 Решение в Wolfram Mathematica

Для решения оптимизационных задач в пакете символьной математики Wolfram Mathematica можно использовать функции Maximize(Minimize). На рисунке 6 представлен фрагмент решения ранее сформулированной задачи.

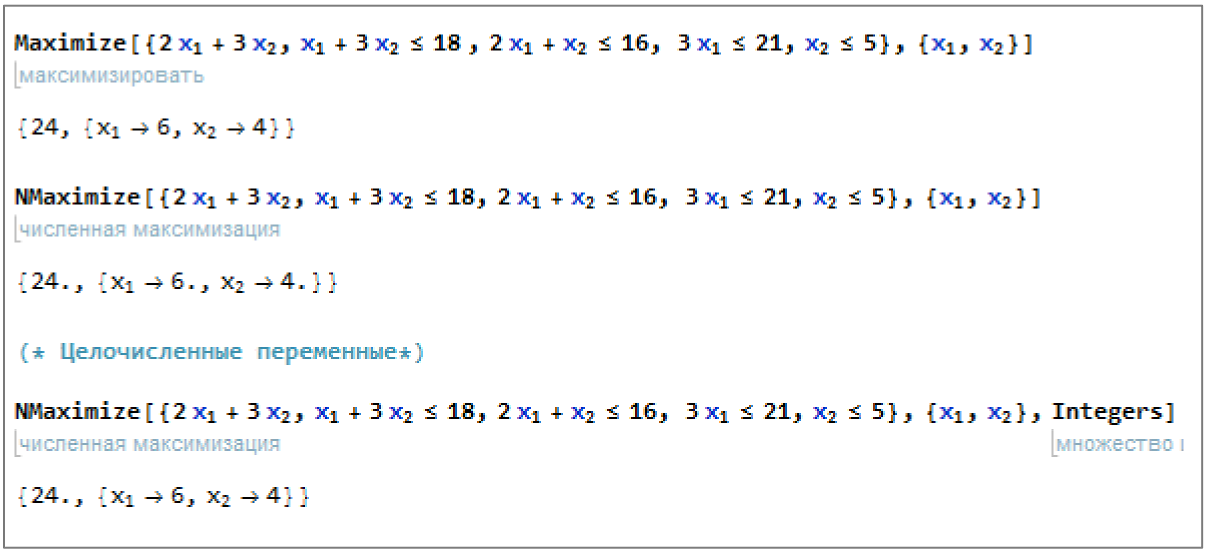

Рис. 6 Решение экстремальной задачи

Очевидно, двойственная задача (2) в данном случае может быть решена в пакете Wolfram Mathematica как представлено на рисунке 7.

```
(* Двойственная задача*)

Minimize[{18 u1 + 16 u2 + 5 u3 + 21 u4, u1 + 2 u2 + 3 u4 ≥ 2,
минимизировать
  3 u1 + u2 + u3 ≥ 3,u1≥0,u2≥0,u3≥0,u4≥0},{u1,u2,u3,u4}]
```

$$\left\{24,\ \left\{u_1 \to \frac{4}{5},\ u_2 \to \frac{3}{5},\ u_3 \to 0,\ u_4 \to 0\right\}\right\}$$

Рис. 7 Решение двойственной задачи

Очевидно, решения с помощью функций Maximize(Minimize), представленные на рисунках 6 и 7 достаточно наглядны, но удобны лишь при исследовании задач небольшой размерности. Более общим подходом является использование функции LinearProgramming, позволяющей использовать исходные данные, представленные в матричном виде, возможно во внешнем файле. Так на рисунке 8 представлено решение (двойственной) задачи с заранее подготовленными исходными данными.

```
b = {18, 16, 5, 21} ;(* В двойственной задаче это коэффициенты ЦФ *)
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ \text{(* Транспонированная производственная матрица *)}$$

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix};\ d = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};\ \text{(* ССЧ + столбец справа из 1 ,т.к. ограничения} \geq \text{*)}$$

```
u = LinearProgramming[b, A, d]
    линейное программирование
```

$$\left\{\frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ 0,\ 0\right\}\ \text{(* Решение двойственной задачи*)}$$

```
f = u.b    (* Проверка *)

24
```

Рис. 8 Использование функции LinearProgramming

Более того, решение прямой и двойственной задача можно осуществлять одновременно (см. рисунок 9) используя процедуру DualLinearProgramming.

```
(* Двойственный Симплекс-метод*)

{u, x, z, w} = DualLinearProgramming[b, A, d]
```

$$\left\{\left\{\frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ 0,\ 0\right\},\ \{6,\ 4\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ 3\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0\}\right\}$$

Рис. 9 Решение двойственной и прямой задач

Выводы

Проведенное исследование позволило отработать методику анализа решения оптимизационной задачи использования ресурсов (основной задачи производственного планирования). Все этапы работы, включая анализ устойчивости и чувствительности найденного решения к вариации исходных данных, снабжены графическими иллюстрациями, что позволяет образно оценить ситуативное поведение системы при внесении возмущений.

Библиографический список

1. Васильева П.А., Козич В.Г., Баженов Р.И. Решение оптимизационной задачи в MS Excel и Scilab // Постулат. 2018. № 2-1. С. 1.
2. Киселев Н.Г. Решение задач линейного программирования в пакетах прикладных программ // Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования. Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2016. С. 241-247.
3. Тарова А.Д. Решение задач оптимизации в пакете прикладных математических программ Scilab // Системы управления, технические системы: устойчивость, стабилизация, пути и методы исследования. Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2017. С. 121-123