

Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой

Тиньков Дмитрий Владимирович

НИУ «МЭИ»

Аспирант

Аннотация

Для прогиба статически определимой фермы, загруженной по нижнему или верхнему поясу равномерной нагрузкой, методом индукции выводится его зависимость от размеров конструкции и от числа панелей. Применяются специальные операторы системы компьютерной математики Maple. Прогиб находится с помощью формулы Максвелла - Мора. Рассмотрены некоторые частные случаи задачи.

Ключевые слова: ферма, формула Максвелла - Мора, прогиб, индукция, Maple

Calculation of the deflection of a flat arched truss with a cross-shaped grid

Tinkov Dmitriy Vladimirovich

NRU «MPEI»

Postgraduate

Abstract

For the deflection of a statically determinate truss loaded on the lower or upper belt by a uniform load, the induction method deduces its dependence on the dimensions of the structure and on the number of panels. Special operators of the computer mathematics system Maple are applied. The deflection is found using the Maxwell-Mora formula. Some special cases of the problem are considered.

Keywords: truss, Maxwell's - Mohr formula, deflection, kinematic variability, induction, Maple

В классе задач о прогибе фермы, допускающих получение аналитическое решение, отдельно выделяются задачи с двумя натуральными параметрами, определяющими геометрию конструкции. Как правило, это задачи о рамах [1-4] или арках [5-11]. В этих конструкциях одно натуральное число определяет размер ригеля или средней части конструкции, другое — опорные фермы. Так в рассматриваемой ферме с крестообразной решеткой $2n$ панелей образуют ригель, и по m панелей содержится в каждой из боковых частей. Всего в ферме $n_s = 4(n + m)$, стержней, включая четыре стержня, моделирующие опоры (рис. 1). Четыре неизвестные реакции создают внешнюю статическую неопределимость конструкции, не позволяющую найти реакции опор из уравнений равновесия фермы в целом.

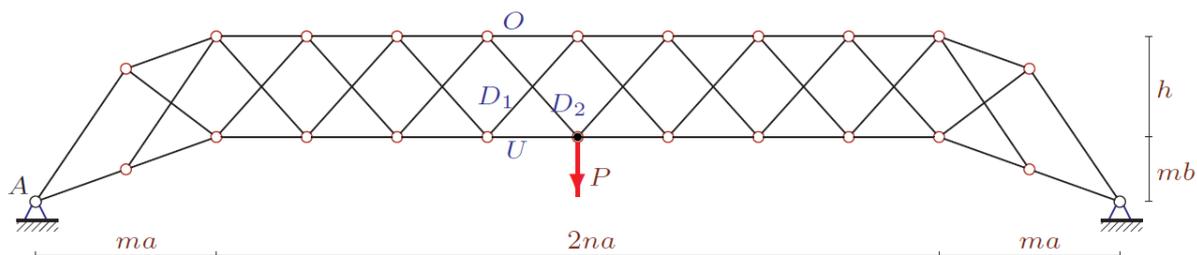


Рисунок 1 — Ферма при $n=2k=4$, $m=2$. Нагрузка на центральный узел нижнего пояса

Усилия в стержнях фермы определяем в символьном виде по программе [12], написанной на языке компьютерной математики Maple. Эта же программа использовалась в [13-26] при решении подобных задач для плоских ферм. В [27-31] на основе этой же программы решены задачи о деформировании пространственных ферм. Узлы и стержни фермы нумеруются (рис. 2).

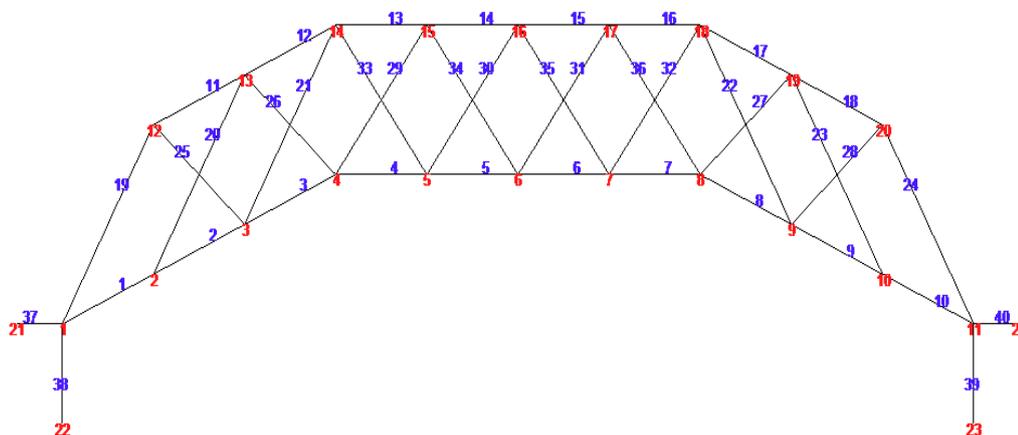


Рисунок 2 — Нумерация узлов и стержней при $n=2$, $m=3$

Координаты шарниров, равновесие которых рассматривается, вводятся в программу. На основе этих данных и данных о структуре решетки составляются уравнения равновесия, содержащие направляющие косинусы усилий. Прогиб фермы определяется по формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-4} N_i^{(P)} N_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Здесь обозначено: $N_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от заданной нагрузки, l_i — длины стержней, $N_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы, приложенной к узлу нижнего пояса в середине пролета, EF — жесткость стержней. Единичную вертикальную силу прикладываем в точке, вертикальное смещение которой разыскивается. Применительно к сосредоточенной нагрузке в середине пролета $N_i^{(P)} = N_i^{(1)}$, что упрощает решение. Пусть число панелей в половине пролет четно $n=2k$. Расчет ряда ферм показал, что для произвольных k и m прогиб имеет вид

$$\Delta = P(C_1 a^3 b h + C_2 a^3 b^2 + C_3 c^3 h^2 + C_4 f^3 b^2 + C_5 a^3 b^2) / (2h^2 b^2 E F), \quad (1)$$

где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $f = \sqrt{a^2 + h^2}$, а коэффициенты C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 определяются методом индукции. Операторы `rgf_findrecur` и `rsolve` системы Maple по данным последовательностей коэффициентов выделяют и решают рекуррентные уравнения, определяющие общие члены этих последовательностей. При этом индукцию необходимо проводить в два приема. Сначала при фиксированных m получаются общие члены последовательностей по n , затем ряд таких формул обобщается по числу панелей m . В результате получаем компактное решение:

$$C_1 = -4k^2, C_2 = 2k(8k^2 + 1)/3, C_3 = m, C_4 = C_5 = 2k.$$

Одновременно можно получить формулы для усилий в стержнях в наиболее опасных местах фермы. Можно предположить, что это середина пролета конструкции:

$$O = -Pak/h, U = Pa((2k-1)b-h)/(2bh), D_1 = 0, D_2 = Pf/(2h).$$

Усилия в опорах не зависят от числа панелей: $X_A = Pa/(2b)$, $Y_A = P/2$.

Для случая загрузки нижнего пояса фермы (рис. 3) решение в общем случае в компактной форме получить не удастся. Полагая $h=b$, $m=n=2k$, методом индукции по k найдем решение

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3) / (3h^2 E F),$$

$$C_1 = 2k(10k^3 - k^2 + 5k - 2), C_2 = -2k^3 + 15k^2 - 4k.$$

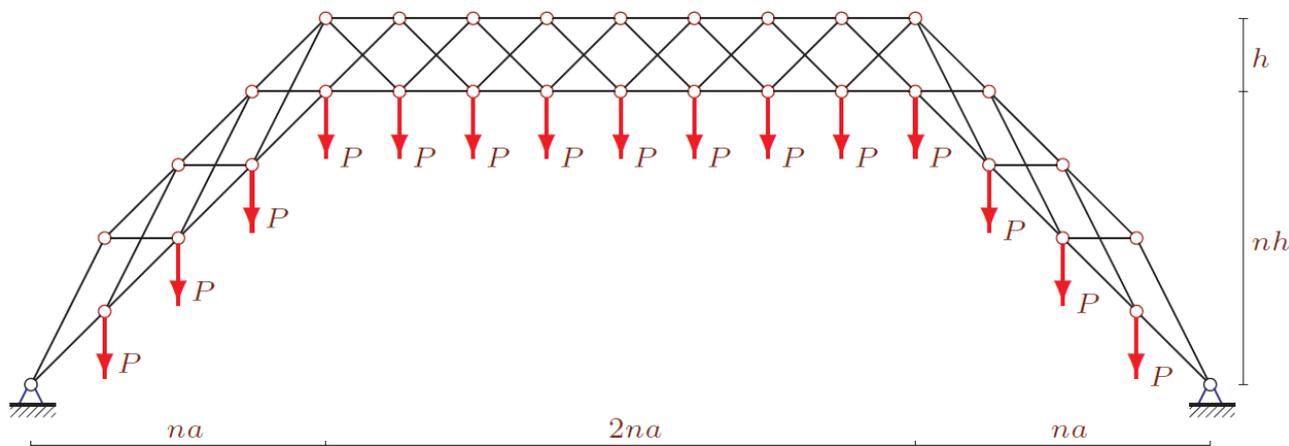


Рисунок 3 — Ферма при $n=2k=4$. Нагрузка на нижний пояс

Аналогично для случая равномерного нагружения узлов верхнего пояса фермы (рис. 4) решение будет иметь вид

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3) / (6h^2 E F),$$

$$C_1 = 40k^4 - 4k^3 + 8k^2 - 11k + 3, C_2 = -4k^3 + 30k^2 - 11k + 3.$$

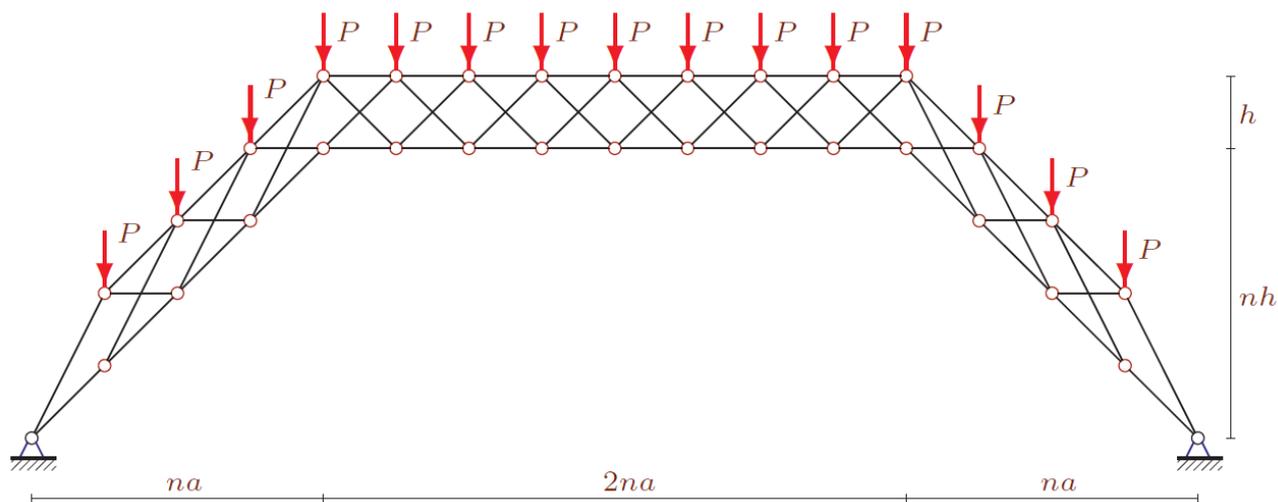


Рисунок 4 — Ферма при $n=2k=4$. Нагрузка на верхний пояс

Библиографический список

1. Кирсанов М.Н., Орлов И.В. Математическая модель упругой работы стержневой конструкции покрытия промышленного здания // Моделирование и механика конструкций. 2017. №5.
2. Доманов Е.В., Кирсанов М.Н. Модельный анализ работы стержневой конструкции покрытия промышленного здания [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №5.
3. Горбунова А.С., Кирсанов М.Н., Лепетюха В.А. Индуктивный вывод формулы для деформации плоской стержневой модели покрытия промышленного здания [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2017. №5.
4. Кирсанов М.Н., Астахов С.В. Двухпараметрическая индукция для вывода зависимости прогиба фермы от числа панелей // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск» / под ред. Марутяна А.С., Файбишенко В.К., Вартумяна А.А. Пятигорск: Издательство ПФ СКФУ, 2017. С. 151-155.
5. Широков А. С. Индуктивный вывод зависимости прогиба и смещения опоры арочной фермы от числа панелей в системе Maple // Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» -GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 267-272.
6. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу. // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17
7. Компанеец К. А. Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосой фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4.
8. Рахматулина А.Р., Смирнова А.А. Вывод зависимости прогиба арочной

- фермы от числа панелей в системе Maple//Материалы Всероссийской научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск» (03.04.2017-05.04.2017) / под. ред. Марутяна А.С., Файбишенко В.К., Вартумяна А.А. Пятигорск: Издательство ПФ СКФУ, 2017. 262 с. С.85-88.
9. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. – № 5. – С. 50-55
 10. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5. С. 9-14.
 11. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. №9. С. 8-10.
 12. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
 13. Кирсанов М.Н. Точное решение задачи о прогибе решетчатой фермы с произвольным числом панелей // Научный журнал строительства и архитектуры. 2017. №4(48). С. 83-89.
 14. Широков А.С. Аналитический расчет смещения опоры балочной фермы с верхними шпренгелями // Строительная механика и конструкции. 2017. №2(15). С. 11-14.
 15. Кирсанов М.Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте, моделируемом фермой // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560-569.
 16. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. №3. С. 23–27.
 17. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61-68.
 18. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37-43.
 19. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165–171.
 20. Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 8 (107). С. 869–875.
 21. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1, № 14. С. 27–30.
 22. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // Magazine of Civil Engineering. 2017. № 3. С. 61–67. doi:

- 10.18720/MCE.71.7
23. Kirsanov M.N., Razananairina P.C. The formula for deflection of truss with cases of kinematic variability // Постулат. 2017. № 9. С. 1.
 24. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчёта прогиба балочной многорешётчатой фермы // Строительная механика и расчёт сооружений. 2017. № 2 (271). С. 6–10.
 25. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. №7. С.15-17.
 26. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. №12. С. 28.
 27. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5. С. 11-15.
 28. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2-6.
 29. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 52–58.
 30. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5–8.
 31. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. №4. С. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.5.